



ASOCIACION ARGENTINA  
DE ECONOMIA POLITICA

ANALES | ASOCIACION ARGENTINA DE ECONOMIA POLITICA

# LIII Reunión Anual

Noviembre de 2018

ISSN 1852-0022

ISBN 978-987-28590-6-0

Valuación de opciones reales: un simple algoritmo  
basado en simulación monte carlo

**Milanesi Gastón**

# **VALUACIÓN DE OPCIONES REALES: UN SIMPLE ALGORITMO BASADO EN SIMULACIÓN MONTE CARLO.**

## **Real Options Valuation: a simple algorithm based in Monte Carlo Simulation**

El trabajo presenta un simple algoritmo basado en simulación Monte Carlo para valorar flexibilidad estratégica de un proyecto, con resultado equivalente obtenidos con el modelo Black-Scholes (BS). Su principal ventaja es la simplicidad para explicitar la conexión entre valor expandido, flujos de fondos, opciones del activo real. Los resultados preliminares obtenidos demostraron: a) equivalencia algebraica al modelo BS, para opciones reales simples (diferimiento, expansión, abandono, venta), b) ajuste al modelo binomial y c) versatilidad en la valuación estrategias con opciones reales simples (inversión-transferencia) o inversión diferida estocástica (precio de ejercicio no determinístico)

Palabras claves: Opciones reales, Método Monte Carlo, Simulación

Código Jel:G13, G31

The paper shows a simple algorithm based on Monte Carlo calculation, for valuing the project's strategic flexibility with equivalent results obtained with the Black-Scholes (BS) model. Its main advantage is the simplicity for specifying the connection between the expanded value, cash flows and real asset's option. The preliminary results obtained shown: a) algebraic equality to the BS model, for simple real options (defer, expansion, abandon, sell); b) adjust to the binomial model; c) versatility for valuing strategy with simple real options (investment-transfer) or defer stochastic investment (exercise price not deterministic).

Key words: Real Options, Monte Carlo method, Simulation

Jel Code: G13, G31

### **1-Un breve resumen sobre Opciones Reales**

En los últimos tiempos, las opciones reales se han convertido en un instrumento de valoración utilizado para cuantificar la flexibilidad estratégica contenida en las decisiones empresariales. Claro que, a menudo, su utilidad se ve opacada por la complejidad matemática de sus modelos. No obstante no debe perderse de vista que el valor de una opción es el valor actual de la sumatoria, correspondiente al producto entre los flujos de fondos futuros de la opción y las probabilidad de ocurrencia asociadas a cada posible valor. A las magnitudes probables cuyo resultado es negativo, se le asigna valor cero. Eso es debido a la flexibilidad del instrumento, puesto que el titular de la opción adquiere un derecho, pero no se obliga. Por lo tanto no queda expuesto irreversiblemente a la incertidumbre de la inversión. El proceso para estimar el valor de una opción puede resumirse a tres pasos:

- a. Proyectar la distribución de probabilidad de valores futuros correspondientes al subyacente.
- b. Estimar los valores esperados asociados a la distribución de probabilidad obtenida en (a), computando valor cero a los resultados esperados de signo negativo.
- c. Calcular el valor actual de la suma de valores esperados obtenidos en (b), ponderados por su probabilidad de ocurrencia.

El primer paso se refiere al modelado de la función de distribución de probabilidad correspondiente a los posibles valores que adopta el activo. El segundo define el procedimiento seleccionado para la estimar un valor esperado individual (usado como el valor esperado del precio de la opción). El tercero permite estimar el valor teórico de la opción como el producto entre la suma ponderada entre valores terminales (b) y probabilidades asociadas (a), actualizada esta por el valor tiempo del dinero. Los tres pasos es el concepto que subyace en los modelos de mayor complejidad.

Los modelos de opciones reales son una adaptación a situación de valuación de activos reales, a partir de los modelos seminales utilizados en la valuación de opciones financieras para valuar opciones financieras. Sus bases se encuentran en el modelo de Black- Merton- Scholes (BMS) (Black y Scholes, 1972 ,1973 y Merton, 1973). La fórmula provee una forma de solución cerrada a través de ecuaciones diferenciales estocásticas, para describir el valor de la opción. A lo largo del tiempo el modelo evolucionó a formas complejas, dependiendo de modificaciones y adecuaciones según el proceso estocástico seleccionado; cantidad de momentos estocásticos de orden superior, complejidad y estructura de la opción, (Dixit y Pindyck, 1994; Baliero Filho y Rosenfeld, 2004; Haug Gaarder, 2007; Wilmott, 2009). También, y con fines prácticos para el *management* de la

firma, el modelo BSM se adaptó a un lenguaje matemático sencillo, con el desarrollo del modelo binomial (Cox, Ross y Rubinstein, 1979; Rendleman y Bartter, 1979; Jarrow y Rudd, 1982; Jabbour, Kramin y Young, 2001; Camara y Chung, 2006; Chance, 2007).

Existe una importante literatura relativa a la valoración de opciones reales, (Myers, 1977; Brennam y Schwartz, 1985; Mason y Merton, 1985; Mc Donal y Siegel, 1986; Trigeorgis y Mason, 1987; Keema, 1988; Kulatilaka, 1988; Trigeorgis, 1988; Pindyck, 1988; Myers y Majd, 1990; Trigeorgis, 1991; Trigeorgis, 1993; Dixit y Pindyck, 1994; Kulatilaka y Trigeorgis, 1994; Kulatilaka, 1995; Smith y Nau, 1995; Trigeorgis, 1995; Smit, 1996; Trigeorgis, 1997; Brennam y Trigeorgis, 2000; Copeland y Antikarov, 2001; Chance y Peterson, 2002; Boer, 2002; Borison, 2003; Smit y Trigeorgis, 2004; Brandao, Dyer y Hahn, 2005; Smith, 2005; Shockley, 2006; Kodukula y Chandra, 2006; Haahtela, 2010; Brous, 2011; Haahtela, 2011(a) y (b); Brandao, Dyer y Hahn 2012; Milanesi, 2013; Milanesi, Pesce y El Alabi, 2013; Milanesi y Tohmé, 2014; Milanesi, 2014; Mun, 2015; Salahaldin, 2016; Milanesi, 201). Los citados modelos se destacan por su riqueza matemática, en un intento de describir y valorar la flexibilidad de las diferentes estrategias contenidas en el valor de un activo real<sup>1</sup>. Pero a veces se transforman en “cajas negras” en donde se pierde capacidad para interpretar su lógica y por ende resultados arrojados.

En base a las ideas expuestas, el presente trabajo propone un simple algoritmo para valorar opciones reales respetando los tres pasos indicados: a) proyecta un proceso estocástico, b) determina un valor esperado, c) calcula el valor intrínseco actualizando a fecha de valuación el valor obtenido en el punto b). Los resultados obtenidos se aproximan a los generados por el modelo Black-Scholes (BS) y el modelo binomial, conduciendo a idénticas conclusiones. Cabe destacar que en campo de las decisiones estratégicas de empresa es más importante la conclusión de la decisión y su sentido que la rigurosa exactitud del cálculo.

Los insumos del modelo bajo estudio, lo constituyen la información disponible y extraída del valor actual de los flujos de fondos del proyecto. Esto es, la distribución de probabilidad de los flujos de fondos del proyecto, tasa ajustada por riesgo, el nivel de inversión y la tasa libre de riesgo. Insumos que nutren una suerte de modelo que, como fue aclarado previamente, replica los tres pasos para determinar el valor de una opción real (Datar, Matew y Johnson; 2007; Carmichael, Hersh y Praneeth, 2011). La clave del modelo reside

---

<sup>1</sup> El valor de un activo real, por ejemplo una empresa en marcha se integra por los activos tangibles e intangibles existentes más las “*oportunidades de crecimiento*”, eso último es lo valorado por el enfoque de opciones (Smit y Trigeorgis, 2004).

en el uso de simulación Monte Carlo sobre los flujos de fondos esperados suponiendo una distribución lognormal.

Los resultados preliminares obtenidos demuestran que el método es algebraicamente equivalente al modelo BS, para opciones reales asimilables a *call*, *put* o combinaciones de esta y aproximándose razonablemente a los valores generados por el modelo binomial. Es práctico y funcional, ya que de forma sencilla incorpora complejidades emergentes de la inversión en activos reales como el carácter estocástico de la inversión (precio de ejercicio), es último tratado de forma determinístico en los clásicos contratos de opciones financieras. El trabajo se estructura de la siguiente manera: en la siguiente sección desarrolla el algoritmo y a continuación, este es contrastado contra los resultados generados por el modelo BSM y el binomial. Para el último es sensibilizando el plazo para ejercer la opción. Luego se desarrollan casos donde el algoritmo propuesto se aplicado sobre otras situaciones de decisión en proyectos de inversión como: a) abandono del proyecto (*put simple*); a) proyecto diferido en el tiempo con flujos estocásticos (*call con ejercicio aleatorio*), y, c) proyecto diferido con flujo estocásticos y opción de venta de licencia (*long straddle*). Finalmente se presentan las principales conclusiones.

## **2. Valoración de un proyecto de inversión con opciones: el modelo Black-Scholes y su lógica a través de un algoritmo basado en simulación Monte Carlo.**

En la presente sección, a través de un caso hipotético de estudio se desarrolla el algoritmo de simulación Monte Carlo, comparando funcionamiento y resultados con el modelo BS y Binomial.

### **2.1 El Valor Actual Neto (VAN) en un proyecto con flexibilidad estratégica: Opción de inversión diferida.**

Consideré el siguiente caso: la firma R&D planifica el desarrollo de una nueva droga que será lanzada al mercado en un plazo de cinco años. Actualmente, se debe decidir si se asignan recursos a un grupo de investigación encargado de realizar todas las pruebas pilotos y diligencias para obtener las autorizaciones de comercialización frente a organismos de control. Para sostener el proyecto y el equipo, se debe demostrar la viabilidad económica-financiera del proyecto en su etapa de comercialización. Si los resultados esperados en la etapa de comercialización son positivos, serán uno de los argumentos para que la gerencia pueda transmitir, defender y concretar, a los propietarios la decisión estratégica de asignar recursos en la primera etapa reforzando el equipo. Consecuentemente el proyecto bajo estudio consta de dos etapas: de prueba y comercial, donde el resultado de esta última condiciona el inicio de la fase piloto. La primera fase dura

cinco años ( $t=5$ ), por lo tanto la comercialización comenzará a partir de dicho plazo. En relación a la segunda etapa, se estima que generará un valor actual de los beneficios,  $E(VP_5)$  \$4.375 (millones) con desvío  $\sigma_5$  de \$1.345 (millones). Asimismo, la tasa de costo promedio ponderado de capital de la firma (CPPC) es del 10,5% y la tasa libre de riesgo del 5,5%. La inversión que demanda la etapa de comercialización a concretar en el quinto año es de \$6.000 (millones), sin riesgo de cambio en los precios de los valores proyectados.

Si el proyecto se valora con el enfoque tradicional del descuento de flujos de fondos se tiene:  $VA(VP_5; k) = \$2.588,05$  (millones);  $VA(I_5; r) = \$4557,43$  (millones) por lo tanto  $VAN = VA(VP_5; k) - VA(I_5; r) = -\$1969,38$  (millones). A la luz de los resultados obtenidos el proyecto debe rechazarse, ya que los esfuerzos en investigación realizados en la primera etapa no se conectarán con resultados favorables en la fase de comercialización. No obstante el ejemplo es un típico caso de análisis incompleto debido a las falencias que presenta el modelo tradicional de descuento de flujos de fondos. Este no considera el valor añadido por la opción del proyecto<sup>2</sup>, ya que supone que la inversión es irreversible e inflexible. El descuento de flujos de fondos supone que el compromiso de invertir en la segunda etapa ( $t=5$ ) se contrae al inicio ( $t=0$ ). La flexibilidad estratégica del proyecto debe ser cuantificada utilizando modelos de valoración de opciones.

## 2.2 La opción real de diferir utilizando el modelo Black-Scholes

El modelo BS es aplicado en la valoración de opciones reales simples (diferimiento, abandono, expansión) asimilables a *call-put* europeos. Su valor depende de la evolución estocástica del subyacente, influenciada principalmente por su volatilidad<sup>3</sup>. Para el usuario profesional o practicante, el modelo no explicita de manera sencilla la conexión entre flujos de fondos y valor esperado del proyecto, durante la vida de la opción. Mayormente este fue un motivo que sirve para entender porque estos instrumentos no han gozado de difusión en el mundo de los negocios, (Fornero, 2011). La ecuación del modelo BS es,

$$C_0 = V_0 N(d_1) - Xe^{-rt} N(d_2) \quad (1)$$

<sup>2</sup> La opción consiste en diferir el compromiso de la inversión (opción de diferimiento) asimilable a una opción europea: espera de cinco años con el objeto de acotar la incertidumbre ante el ingreso de nueva información por el transcurso del tiempo.

<sup>3</sup> El parámetro volatilidad es uno de los principales insumos en los modelos de valoración de opciones. Su determinación ofrece ciertas dificultades en proyectos donde no existe activo financiero o cartera negociada en el mercado de capitales que replique la variabilidad de sus flujos de fondos del proyecto (Wang y Halal, 2010). Como solución frente al problema indicado se utiliza el enfoque MAD (*Marketed Asset Disclaimer*) (Copeland y Antikarov, 2001; Brandao, Dyer y Hahn, 2005; Smith, 2005). en la estimación del desvío correspondiente a los flujos del proyecto. También se puede estimar mediante modelos de volatilidad condicional trabajando con series de tiempo (Brandao, Dyer y Hahn, 2012).

Donde  $C_0$  representa el valor teórico de la opción,  $V_0$  valor actual del subyacente,  $N(d_i)$  la distribución normal estándar acumulativa de la variable  $d_i$ ,  $X$  el precio de ejercicio;  $r$  la tasa libre de riesgo y  $t$  la fecha de expiración. Las variables  $d_1$  y  $d_2$  se estiman de la siguiente manera  $d_1 = [\ln(V_0/X) + (r + \sigma^2/2)T]/\sigma\sqrt{T}$  y  $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$ .<sup>4</sup>

En el caso bajo estudio, el valor de la opción se determina de la siguiente manera: subyacente  $V_0 = E(VP_5) \times e^{-kt} = \$4.375 \times e^{-0,105 \times 5} = \$2.588,05$ ; precio de ejercicio  $X = \$6.000$ ; tasa libre de riesgo  $r = 5,50\%$  y fecha de ejercicio  $t = 5$ .

La volatilidad se obtiene despejando<sup>5</sup> de la expresión,  $Dsv = V_0 e^{kt} \sqrt{e^{\sigma^2 t} - 1} = \$1.345 = \$2.588,05 e^{0,105 \times 5} \sqrt{e^{\sigma^2 5} - 1}$  (Wilmott, Howison y Dewynne, 1995) donde  $\sigma = 13,44\%$ .

Los parámetros estocásticos ascienden a:  $d_1 = -1,7326$ ;  $d_2 = -2,0331$ ;  $N(d_1) = 0,04158$ ;  $N(d_2) = 0,0210$ .

El valor expandido o estratégico (VE) del proyecto con opciones ( $C_0$ ) es de \$11,82 (millones) (ecuación 2). Este se descompone en valor actual tradicional (VAN) y valor de las opciones (VOR); (Trigeorgis, 1997); siendo  $VE = VAN + VOR$ ,  $\$44,77 = \$1969,38 + \$4557,43$ .

### 2.3 El valor de la opción real de diferir a través del algoritmo con simulación Monte Carlo.

El algoritmo es una sencilla herramienta que permite determinar el valor de las opciones reales simples asimilables a *call- put* europeos. Emplea la técnica de simulación Monte Carlo, simulando la distribución de probabilidad de beneficios futuros, actualizados a la tasa de costo del capital del proyecto, asignando valor cero a las magnitudes negativas. Para su implementación se deben seguir los siguientes pasos:

- Definir la variable aleatoria con media igual al valor actual de los beneficios futuros en el momento de ejercicio  $t=n$  y desvío a partir de una distribución lognormal.
- Definir como restricción que el valor actual de los probables flujos negativos esperados es igual a cero.
- Determinar del valor actual de la distribución de probabilidad anterior producto de la simulación,

<sup>4</sup> La expresión  $V_0 N(d_1)$  es el valor actual esperado correspondiente al subyacente en el caso que la opción, finalice en el dinero. Donde  $N(d_1)$  es la probabilidad ajustada por riesgo que el subyacente finalice por encima del precio de ejercicio a fecha de vencimiento.  $X e^{-rt} N(d_2)$  representa el valor actual esperado del precio de ejercicio si la opción finaliza en el dinero, siendo  $N(d_2)$  la probabilidad ajustada por riesgo de que la opción sea ejercida (Carmichael, Hersh y Praneeth, 2011).

<sup>5</sup> La volatilidad se obtiene iterando la expresión con la función buscar objetivo del menú Datos en Microsoft Excel®. Dado el valor en unidades monetarias en un instante futuro ( $t=5$ ), el valor actual del valor esperado del proyecto y la incógnita de la volatilidad, iterando se llega a resolver la misma.

El resultado que arroja el modelo es igual al valor de una opción europea, calculada utilizando el modelo BS,

$$C_0 = E[\max(\bar{V}_0, k - I, r); 0](2)$$

Donde  $\bar{V}_0$  representa la variable aleatoria con primer y segundo momento estocástico  $E(V_T)$  y  $Dsv(V_T)$ ;  $I$  el precio de ejercicio determinístico de la inversión,  $k$  la tasa ajustada por riesgo y  $r$  libre de riesgo respectivamente.

Para demostrar el funcionamiento del modelo se empleó el ejemplo desarrollado en el punto 2.2. La simulación se desarrolló con el aplicativo Crystall Ball<sup>6</sup> ®. La variable aleatoria en  $t=5$  se define con media  $E(V_T) = \$4.375$  desvío  $Dsv(V_T) = \$1.345$ , suponiendo que sigue el comportamiento de una distribución lognormal. Con los datos correspondientes a  $k = 10,5\%$ ;  $r = 5,5\%$ ,  $I = \$6.000$ , se estable como variable de previsión el siguiente algortimo:  $@E[\text{Max}\{(\underline{VP}_5@k\text{-Inversión}_5@r); 0\}]$ . En el proceso de simulación se desarrolló con  $n=500.000$  pruebas, obteniéndose un valor medio esperado del proyecto con opciones de  $C_0 = \$11,82$  (millones). El resultado obtenido se ajusta al valor de  $\$11,82$  correspondiente a la ecuación 1. En la siguiente tabla se presentan las salidas estadísticas de la simulación.

| Estadísticas             | Call         |
|--------------------------|--------------|
| Pruebas                  | 500000       |
| Caso base                | \$ 0,00      |
| Media                    | \$ 11,82     |
| Mediana                  | \$ 0,00      |
| Modo                     | \$ 0,00      |
| Desviación estándar      | \$ 114,02    |
| Varianza                 | \$ 13.001,20 |
| Sesgo                    | 15,21        |
| Curtosis                 | 352,88       |
| Coeficiente de variación | 9,65         |
| Mínimo                   | \$ 0,00      |
| Máximo                   | \$ 8.194,14  |
| Ancho de rango           | \$ 8.194,14  |
| Error estándar medio     | \$ 0,21      |

Tabla 1: Salidas estadísticas de la simulación  $@E[\text{Max}\{(\underline{VP}_5@k\text{-Inversión}_5@r); 0\}]$ . Fuente: elaboración propia

<sup>6</sup> Release 11.01.3.000

El tercer y cuarto momento estocástico ( $A=15,21$ ;  $K=352,88$ ) son un rasgo característico de todo proyecto con flexibilidad estratégica. Es por ello que las opciones financieras, y por extensión las reales poseen un importante apalancamiento, explicado este por la asimetría positiva y las amplias colas en la distribución de valores probables (Collan, Fullér y Mezei, 2009), conforme surge en la ilustración 1. La fuerte asimetría y curtosis, explica estadísticamente el por qué un proyecto con un valor estático negativo, tenga un valor estratégico positivo, producto de la flexibilidad estratégica (opción). En otras palabras, se la reversibilidad propia de las opciones y su potencial valor positivo encuentra fundamento estadístico en el tercer y cuarto momento estocástico (asimetría y curtosis) (Taleb, 2004).

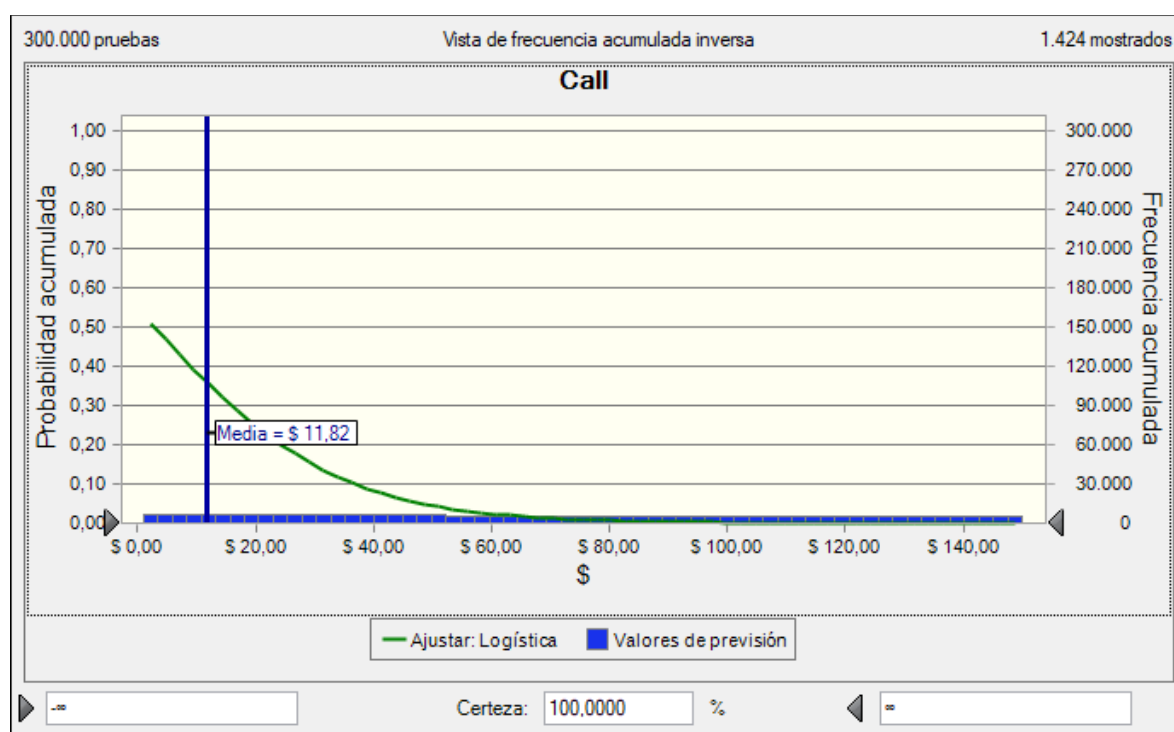


Ilustración 1: Valor esperado promedio y distribución de frecuencias simulación simulación  
 $@E[\text{Max}\{(\text{VP}_5@k-\text{Inversión}_5@r);0\}]$

Asimismo, la sencillez y transparencia del modelo lo convierte en una herramienta de comunicación eficaz, posibilitando que la gerencia justifique el curso de acción seleccionado ante las diferentes capas organizacionales involucradas, sin apartarse de la racionalidad correspondiente al criterio costo-beneficio.

#### 2.4 Robustez del algoritmo: Análisis comparativo con el modelo Binomial y BS.

El desempeño del modelo será contrastado con los resultados obtenidos de aplicar el clásico modelo binomial CRR (Cox, Ross y Rubinstein, 1979). Este se caracteriza por el comportamiento discreto de la variable aleatoria con distribución binomial, que converge

con el modelo BS cuando  $n/t \rightarrow \infty$ . A continuación se brindan los datos del caso hipotético empleado: se debe valorar una inversión diferida donde su valor actual estático es de  $V_0 = \$1000$ ; inversión,  $I = \$800$ ; tasa libre de riesgo  $r = 5,5\%$  y tasa ajustada por riesgo  $k = 6\%$ , utilizando el modelo binomial. Los diferentes horizontes propuestos para el ejercicio de la opción de inversión son:  $t=1,2,3,4,5,10,20$ . Se supone una volatilidad del  $\sigma=9,53\%$ .

**Modelo binomial y BS:** a partir de la volatilidad se calculan los coeficientes:  $u = e^{0,0953\sqrt{1}}$  y  $d = e^{-0,0953\sqrt{1}}$  y  $u=1,1$  y  $d=0,89$  del modelo. La expresión utilizada para proyectar el valor del subyacente es la siguiente;

$$V_{(i,j)t+1} = V_{i,t} \times u; V_{j,t} \times d \quad (3)$$

Seguidamente se debe estimar el valor al vencimiento de la opción con la siguiente expresión,

$$C_t = \max(V_t - I, 0) \quad (4)$$

Finalmente, el valor esperado inicial se obtiene calculando recursivamente desde  $t = n$  hasta  $t = 0$ . El proceso recursivo requiere de ponderar los valores de los nodos intermedios por probabilidades neutrales al riesgo,  $V_{(i,j)t-1} = [V_{i,t} \times p + V_{j,t} \times (1 - p)] \times e^{-rt}$ . Las probabilidades neutrales al riesgo son;  $p = (e^r - d)/(u - d)$  con valor  $p=0,7051$  y  $1-p=0,2948$  para el ejemplo bajo estudio. La expresión sintética para determinar el valor actual de la opción a través del método binomial expuesta en la ecuación 5, fue la utilizada en el trabajo;

$$C_0 = \left[ \sum_{j(t)=0}^{j(t)=n} C_{j(t)} \frac{j!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j} \right] e^{-rt} \quad (5)$$

En el anexo 1 son expuestas las rejillas correspondientes a valores terminales, probabilidades neutrales al riesgo y valor actual esperado de la opción (ecuaciones 4 y 5). También son expuestas las variables de entrada del presente ejemplo, correspondientes al modelo BS (ecuación 1).

**Algoritmo:** se procedió a la simulación de los posibles valores correspondientes al subyacente, suponiendo distribución lognormal con media  $E(V_T) = V_0 e^{kt}$  y desvío  $Dsv(V_T) = V_0 e^{kt} \sqrt{e^{\sigma t} - 1}$ . En la tabla se presentan el valor actual de la inversión ( $I_t@r$ ), el valor actual esperado de los flujos en cada horizonte ( $E(VP)_t@k$ ), el valor actual esperado inicial ( $VA(VP)_t$ ) y el desvío en los diferentes horizontes ( $\sigma_t$ ).

| $t$         | 1        | 2        | 3        | 4        | 5        | 10       | 20       |
|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $I_t@r$     | \$760,98 | \$723,86 | \$688,5  | \$654,98 | \$623,04 | \$485,22 | \$294,30 |
| $E(VP)_t@k$ | \$1061,8 | \$1127,4 | \$1197,2 | \$1271,2 | \$1349,8 | \$1822,1 | \$3320,1 |

|            |          |          |          |          |          |          |           |
|------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|
| $VA(VP)_t$ | \$1000   | \$1000   | \$1000   | \$1000   | \$1000   | \$1000   | \$1000    |
| $\sigma_t$ | \$101,42 | \$152,65 | \$198,97 | \$244,52 | \$290,95 | \$561,83 | \$1481,77 |

Tabla 2: Variables de entradas correspondientes al modelo de simulación. Fuente: elaboración propia.

La celda de previsión (ecuación 2) se define como  $@E[\text{Max}\{(\underline{VP}_5@k\text{-Inversión}_5@r); 0\}]$ .

Nuevamente sobre la base de 500.000 iteraciones se obtienen los siguientes resultados;

Tabla 3: Salidas estadísticas de la simulación  $@E[\text{Max}\{(\underline{VP}_5@k\text{-Inversión}_5@r); 0\}]$ . Fuente: elaboración propia

| Estadísticas              | t=1      | t=2    | t=3       | t=4       | t=5       | t=10      | t=20       |
|---------------------------|----------|--------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|
| Pruebas                   | 500000   | 500000 | 500000    | 500000    | 500000    | 500000    | 500000     |
| Caso base                 | 239,02   | 276,13 | 311,43    | 345,02    | 376,96    | 514,78    | 705,70     |
| Media                     | 239,03   | 276,13 | 311,68    | 346,06    | 377,52    | 515,33    | 705,03     |
| Mediana                   | 234,56   | 276,13 | 297,64    | 327,59    | 355,08    | 470,05    | 620,50     |
| Modo                      | 0,00     | 276,13 | 0,00      | 0,00      | 0,00      | 0,00      | 0,00       |
| Desviación estándar       | 95,25    | 0,00   | 164,83    | 191,06    | 212,83    | 307,34    | 439,70     |
| Varianza                  | 9.073,43 | 0,00   | 27.167,33 | 36.502,77 | 45.297,13 | 94.460,06 | 193.348,70 |
| Sesgo                     | 0,2963   | ---    | 0,5545    | 0,6282    | 0,6866    | 0,9823    | 1,4200     |
| Curtosis                  | 3,11     | ---    | 3,44      | 3,60      | 3,73      | 4,70      | 6,80       |
| Coefficiente de variación | 0,3985   | 0,00   | 0,5288    | 0,5521    | 0,5638    | 0,5964    | 0,6230     |
| Mínimo                    | 0,00     | 276,13 | 0,00      | 0,00      | 0,00      | 0,00      | 0,00       |
| Máximo                    | 717,41   | 276,13 | 1.442,95  | 1.732,17  | 1.974,13  | 3.692,41  | 6.592,70   |
| Ancho de rango            | 717,41   | 0,00   | 1.442,95  | 1.732,17  | 1.974,13  | 3.692,41  | 6.592,70   |
| Error estándar medio      | 0,13     | 0,00   | 0,23      | 0,27      | 0,30      | 0,43      | 0,62       |

La siguiente tabla compara los resultados entre el modelo binomial, BS, y el algoritmo.

| Horizonte                     | t=1       | t=2       | t=3       | t=4       | t=5       | t=10      | t=20      |
|-------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| VE=C <sub>0</sub> (Modelo)    | \$ 239,36 | \$ 276,13 | \$ 311,43 | \$ 345,02 | \$ 376,96 | \$ 514,78 | \$ 705,70 |
| VAE=C <sub>0</sub> (BS)       | \$ 239,22 | \$ 277,04 | \$ 312,93 | \$ 346,86 | \$ 378,97 | \$ 516,42 | \$ 706,24 |
| VAE=C <sub>0</sub> (Binomial) | \$ 239,03 | \$ 276,13 | \$ 311,68 | \$ 346,06 | \$ 377,52 | \$ 515,33 | \$ 705,03 |

Tabla 4: Valor Expandido Modelo, BS y Binomial. Fuente: elaboración propia

Los resultados y expuestos en la tala 4, se ajustan al modelo Binomial y al modelo BS demostrando la robustez de la propuesta.

## 2.5 El algoritmo y el modelo BS en la valoración de la opción de transferencia.

En el caso de una opción de transferencia, esta se asimila a un *put* financiero, por ende la variable de previsión se define como;

$$P_0 = E[\max(I.r - \bar{V}_0, k); 0](6)$$

Continuando con el ejemplo analizado en la sección 2, supóngase que la firma analiza la estrategia de transferir la licencia, intangibles e inversión física del proyecto a un valor  $X = \$4.500$ , con el fin de recuperar la inversión en costos, en el caso de que el valor actual esperado del proyecto en dicho momento es inferior a la cifra invertida. Utilizando el modelo BS la expresión es,

$$P_0 = Xe^{-rt}N(-d_2) - V_0N(-d_1) \quad (7)$$

Su valor es  $\$4.500e^{-0,05 \times 5} \times 0,7802 - \$2588,05 \times 0,8590 = \$915,16$ .

La resolución del problema aplicando el algoritmo requiere definir la variable aleatoria. Nuevamente, es el valor actual esperado del proyecto en  $t=5$ ,  $E(V_T) = \$4.375$ ,  $Dsv(V_T) = \$1.345$ . Se supone distribución lognormal;  $k = 10,5\%$ ;  $r = 5,5\%$  e  $I = \$4.500$ . La variable de previsión del modelo (ecuación 6) es;  $@E[\text{Max}\{(\text{Inversión}_5 @ r - \underline{VP}_5 @ k); 0\}]$ .

| Estadísticas              | Put           |
|---------------------------|---------------|
| Pruebas                   | 500000        |
| Caso base                 | \$ 830,02     |
| Media                     | \$ 912,45     |
| Mediana                   | \$ 942,79     |
| Modo                      | \$ 0,00       |
| Desviación estándar       | \$ 620,20     |
| Varianza                  | \$ 384.645,93 |
| Sesgo                     | 0,0524        |
| Curtosis                  | 2,01          |
| Coefficiente de variación | 0,6797        |
| Mínimo                    | \$ 0,00       |
| Máximo                    | \$ 2.785,35   |
| Ancho de rango            | \$ 2.785,35   |
| Error estándar medio      | \$ 1,13       |

Tabla 5: Salidas estadísticas de la simulación  $@E[\text{Max}\{(\text{Inversión}_5 @ r - \underline{VP}_5 @ k); 0\}]$ . Fuente: elaboración propia

La estrategia de transferencia es la imagen especular de la opción de inversión diferida. Por lo tanto, su potencial valor positivo es justificado con baja curtosis (curva leptocúrtica) y leve sesgo positivo (2,01; 0,0524). En el siguiente gráfico se muestra el valor esperado del proyecto, que asciende a \$912,45 (millones).

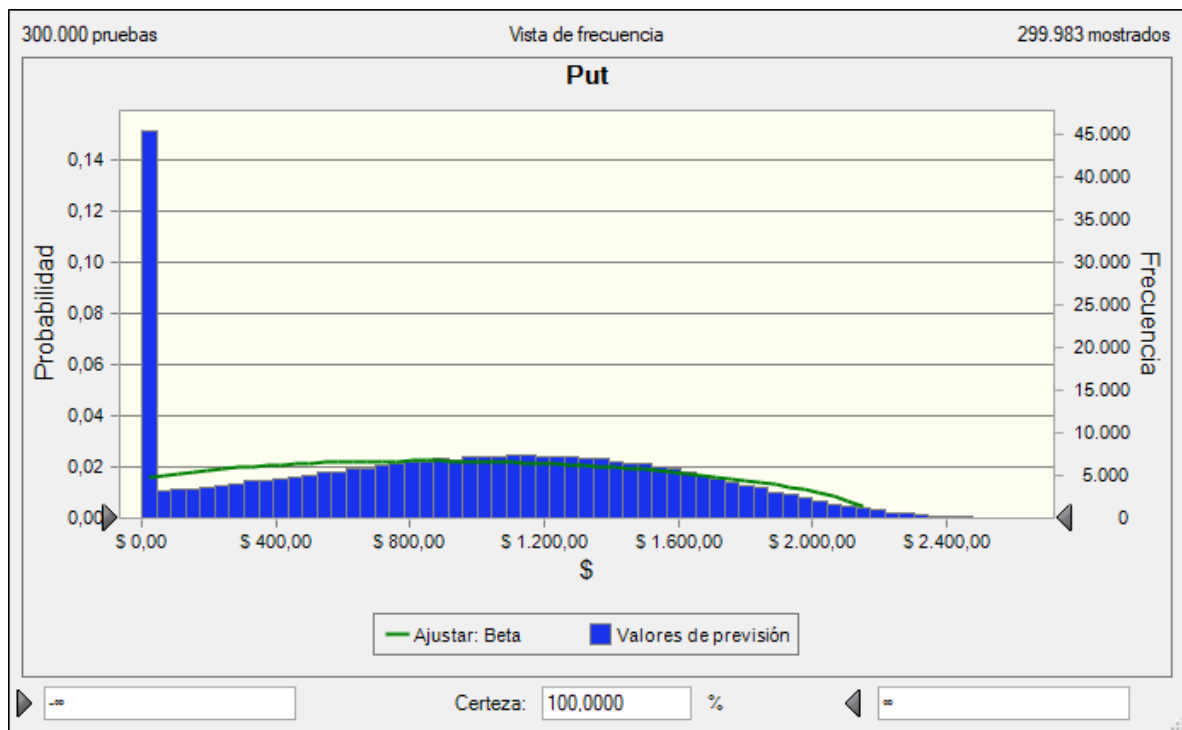


Ilustración 2: Valor esperado promedio y distribución de frecuencias simulación  
 $@E[\text{Max}\{(Inversión_5@r-VP_5@k);0\}]$

El valor expandido descompuesto es  $VE=VAN+VOR$ ; \$915,06,=-830,02+\$1745,08.

### 3. Usos en otros tipos de opciones reales simples

En esta sección se ilustran adecuaciones del modelo propuesto para capturar situaciones de mayor complejidad cuando se valoran utilizando el modelo BS.

#### 3.1 Precio de ejercicio (inversión) variable

Una de las debilidades del modelo BS al ser extrapolado directamente a la valoración de activos reales, consiste en suponer el precio de ejercicio fijo. Esta situación es válida para los contratos financieros, no siendo el caso de las inversiones en proyecto donde la opcionalidad se mantiene por importantes intervalos de tiempo. Sin entrar a trabajar con opciones exóticas, el modelo propuesto permite, de una manera sencilla, suponer un precio de ejercicio variable, de la siguiente manera;

$$C_0 = E[\text{max}(\bar{V}_0, k - I \times (1 + \bar{g}), r); 0] \quad (8)$$

La inversión adopta un comportamiento aleatorio, siendo la variable de previsión definida como  $@E[\text{Max}\{(VP_5@k-Inversión_5@r);0\}]$ . En este caso, la variabilidad en la inversión está dada por la tasa de crecimiento ( $\bar{g}$ ). Siguiendo con el ejemplo de la sección 2, se procede a proyectar variabilidad en los precios correspondientes a los costos de inversión. Se

supone que estos crecen a razón de una distribución normal con tasa de crecimiento  $e(g)$  =2% y  $\sigma$ =1% anual;

| Estadísticas              | Call         |
|---------------------------|--------------|
| Pruebas                   | 500000       |
| Caso base                 | \$ 0,00      |
| Media                     | \$ 23,48     |
| Mediana                   | \$ 0,00      |
| Modo                      | \$ 0,00      |
| Desviación estándar       | \$ 162,40    |
| Varianza                  | \$ 26.372,78 |
| Sesgo                     | 10,68        |
| Curtosis                  | 160,30       |
| Coefficiente de variación | 6,92         |
| Mínimo                    | \$ 0,00      |
| Máximo                    | \$ 5.972,48  |
| Ancho de rango            | \$ 5.972,48  |
| Error estándar medio      | \$ 0,30      |

Tabla 6: Salidas estadísticas de la simulación @E[Max{(VP<sub>5</sub>@k-Inversión<sub>5</sub>@r);0}]. Fuente: elaboración propia

Como toda opción de inversión (call) el valor positivo del proyecto depende significativamente de su asimetría y curtosis (A=\$10,68; K=\$160, 30). El valor medio esperado es de \$23,48 (millones) conforme surge del gráfico

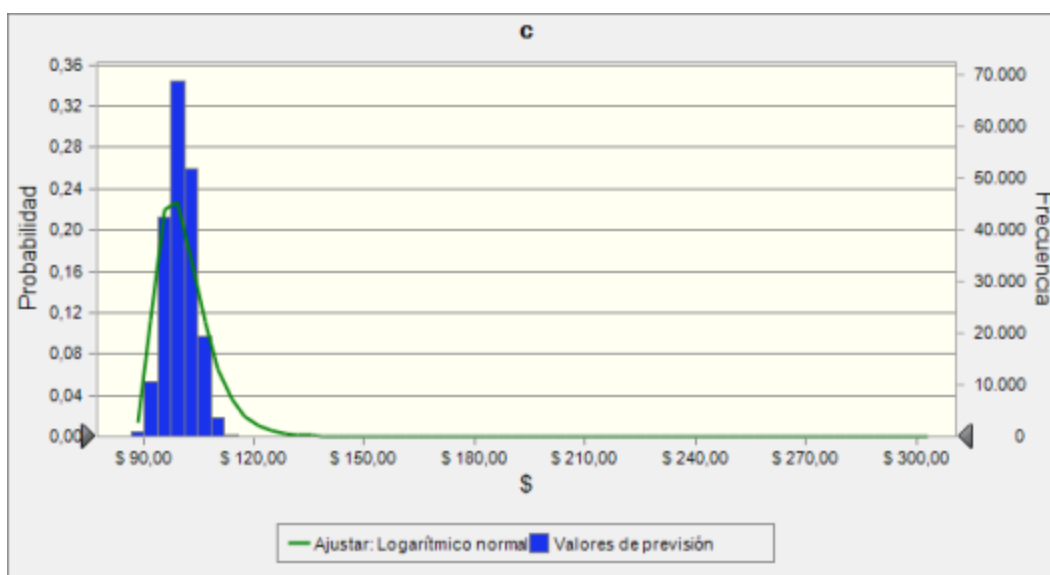


Ilustración 3: Valor esperado promedio y distribución de frecuencias simulación  $@E[\text{Max}\{(\underline{VP}_5@k-\underline{Inversión}_5@r);0\}]$ . Fuente elaboración propia.

El valor expandido descompuesto es  $VE=VAN+VOR$ ;  $\$23,82=-1969,88+\$1993,20$ .

### 3.2 Opción combinada: opción de inversión con diferimiento y venta de licencia:

Las estrategias de inversión diferida (escenarios favorables) y transferencia de licencia (escenarios desfavorables) se asimilan a una combinación de opciones financieras de compra y venta, conocida como *long straddle*. Esta estrategia brinda cobertura sobre escenarios o contextos extremos (éxito – fracasos), típicos a los que enfrentan las empresas de base tecnológica, proyectos de investigación y desarrollo, lanzamientos etc. La ecuación del algoritmo queda planteada como;

$$C_0 = E[\max(\bar{V}_0, k - I \times (1 + \bar{g}), r); \bar{T}] \quad (9)$$

Donde  $T$  es la variable aleatoria precio de transferencia de la licencia, en este caso definida en \$100 (millones). Continuando con el caso base del apartado 2, las variables a simular son:  $V_5$  (lognormal);  $g$  (normal) y la nueva variable aleatoria  $\bar{T}$  suponiendo una distribución lognormal con desvío de \$4 (millones). La variable de previsión se define como  $@E[\text{Max}\{(\underline{VP}_5@k-\underline{Inversión}_5@r);T\}]$ .

| Estadísticas              | c           |
|---------------------------|-------------|
| Pruebas                   | 500000      |
| Caso base                 | \$ 100,00   |
| Media                     | \$ 104,61   |
| Mediana                   | \$ 99,95    |
| Modo                      | ---         |
| Desviación estándar       | \$ 71,30    |
| Varianza                  | \$ 5.084,22 |
| Sesgo                     | 22,91       |
| Curtosis                  | 694,56      |
| Coefficiente de variación | 0,6816      |
| Mínimo                    | \$ 83,22    |
| Máximo                    | \$ 4.438,00 |
| Ancho de rango            | \$ 4.354,78 |
| Error estándar medio      | \$ 0,13     |

Tabla 7: Salidas estadísticas de la simulación  $@E[\text{Max}\{(\underline{VP}_5@k-\underline{Inversión}_5@r);T\}]$ . Fuente: elaboración propia

El valor esperado del proyecto es \$104,61 (millones), nuevamente con fuerte sesgo y asimetría ( $A=\$22,91$ ;  $K=694,56$ ).

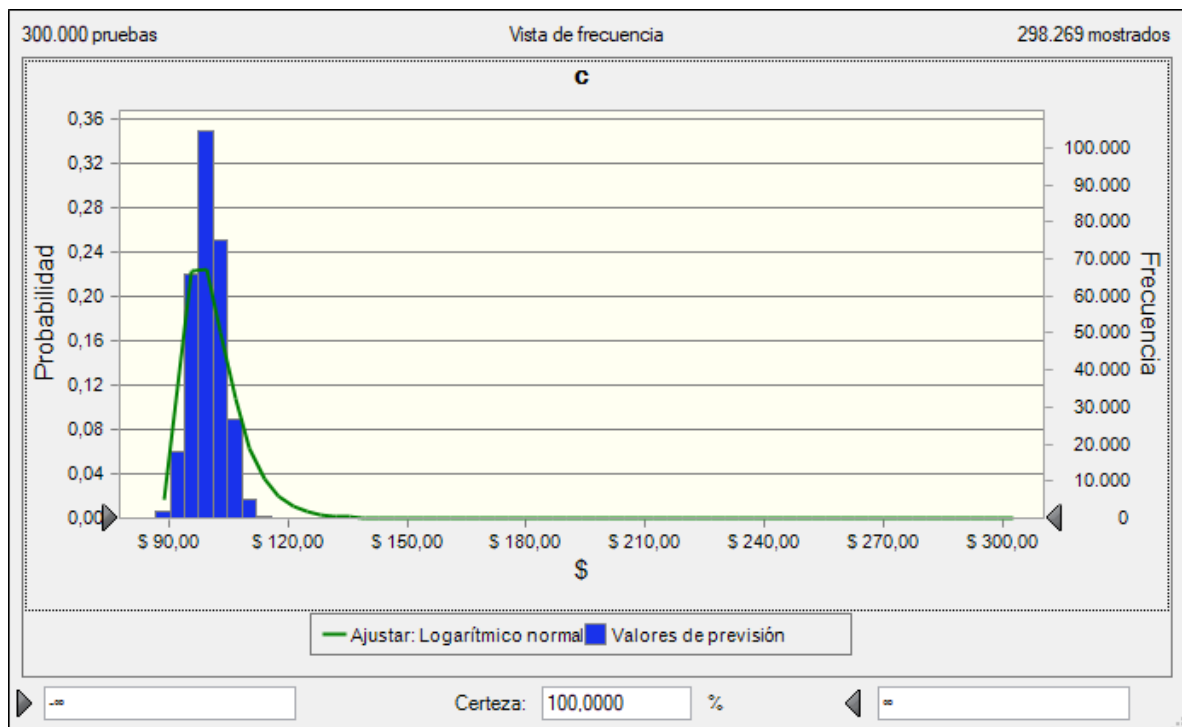


Ilustración 4: Valor esperado promedio y distribución de frecuencias simulación  $@E[\text{Max}\{(\text{VP}_5@k-\text{Inversión}_5@r); T\}]$ . Fuente elaboración propia.

El valor expandido descompuesto es  $VE=VAN+VOR$ ;  $\$28,16=-1969,38+\$2073,99$ .

## Conclusiones

La consideración de la flexibilidad estratégica en las inversiones como unas de las fuentes de valor, ha provocado un mayor refinamiento y complejidad de las herramientas para valorar activos reales. Esta es la esencia y razón del porqué es importante el uso de opciones reales. Los modelos BS (Black-Scholes) y CRR binomial (Cox-Ross-Rubinstein) constituyen las versiones seminales en tiempo continuo y discreto respectivamente. No obstante y sobre todo para los practicantes, su funcionamiento se ve opacado por la falta de claridad, en particular, respecto a manifestar cuales son los conductores de valor del proyecto (flujos de fondos esperados, tasa de costo de capital, comportamiento de la inversión) durante la vida de la opción. Esta situación, en parte, atenta contra la interpretación y difusión de estos modelos en la toma de decisiones gerenciales. Consecuentemente se corre el riesgo de rechazar (aceptar) proyectos con potencialidad de crecimiento (pérdidas), cuya opcionalidad no es cuantificada por los modelos tradicionales. El trabajo presentó un algoritmo de simple interpretación, basado en la simulación Monte Carlo. Este explicita la conexión entre flujos, tasas de costo de capital, inversión y valor del proyecto. Su implementación requiere solamente de tres pasos y algebraicamente brinda

iguales resultados que el modelo BS y CRR. Conforme fue expuesto, este modelo se adapta de manera sencilla a la valuación de situaciones complejas, por ejemplo introduciendo comportamiento aleatorio en la inversión (precio de ejercicio) o combinación de estrategias (inversión diferida aleatoria o precio de venta aleatorio).

Su sencillez y transparencia respecto de los conductores de valor, lo convierte en una herramienta de comunicación eficaz, posibilitando que la gerencia justifique el curso de acción seleccionado ante las diferentes capas organizacionales involucradas, sin apartarse de la racionalidad correspondiente al criterio costo-beneficio

## **Bibliografía**

Baliero Filho; R-Rosenfeld,R, 2004. Testing Option Pricing with Edgeworth Expansion.

*Physica A: Statistical Mechanis an its Application*, Volumen 344, pp. 484-490.

Black, F- Scholes, M, 1972. The Valuation of Options Contracts and a Test of Market Efficiency. *Journal of Finance*, Mayo.pp. 399-418.

Black, F- Scholes, M, 1973. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, Mayo-Junio.pp. 637-659.

Boer, P., 2002. *The Real Options Solutions: Finding Total Value in a High-Risk World*. New York: John Wiley & Sons Inc.

Borison, A., 2003. *Real Options Analysis: Where are the Emperor's Clothes?*, Stanford: Stanford University .

Brandao, L- Dyer, J- Hahn, W, 2005. Using Binomial Decision Trees to Solve Real Options Valuations Problems. *Journal of Decision Analysis*, Issue 2, pp. 69-88.

Brandao, L., Dyer, J. y Hahn, W. (2012): Volatility estimation for stochastic project value models. *European Journal of Operational Research*, 220(3), 642-648.

Brennam, M- Schwartz, E, 1985. Evaluating Natural Resources Investment. *Journal of Business*, Issue 58, pp. 135-157.

Brennan, M- Trigeorgis L, 2000. *Project Flexibility, Agency and Competition: New Development in the Theory and Application of Real Options*. 1 ed. New York: Oxford University Press.

Brous, P., 2011. Valuing an Early-Stage Biotechnology Investment as a Rainbow Option. *Journal of Applied Corporate Finance*, 23(2), pp. 94-103.

Camara,A-Chung, S., 2006. Option Pricing for the Transformed-Binomial Class. *Journal of Futures Markets*, 26(8), pp. 759-787.

Carmichael, D-Hersh,A-Praneeth, P, 2011. Real Options Estimate Using Probabilistic Present Worth Analysis. *The Engineering Economist*, Volumen 56, pp. 295-320.

- Chance, D.-Peterson, P., 2002. *Real Options and Investment Valuation*. s.l.:The Research Foundation of AIMR.
- Chance, D., 2007. A Synthesis of Binomial Option Pricing Models for Lognormally Distributed Assets.. SSRN <http://ssrn.com/abstract=1523548>, pp. 1-25.
- Collan, M- Fullér, R-Mezei, J, 2009. Fuzzy Pay-Off Method for Real Option Valuation. *Journal of Applied Mathematics and Decision Systems*, Volumen ID 238196, pp. 1-14.
- Copeland, T- Antikarov, V, 2001. *Real Options*. 1 ed. New York: Texere LLC.
- Cox, J- Ross, S-Rubinstein, M, 1979. Option Pricing: A Simplified Approach. *Journal of Financial Economics*, Septiembre, pp. 229-263.
- Datar, V- Matews, S-Johnson, B, 2007. A Practical Method for Valuing Real Options: The Boeing Approach. *Journal of Applied Corporate Finance*, Volumen 19, pp. 95-104.
- Dixit, A- Pindyck, R, 1994. *Investment under Uncertainty*. 1 ed. New Jersey: Pricenton University Press.
- Fornero, R., 2011. Las prácticas en las decisiones de inversión: sus características según los estudios empíricos. XXX *Jornadas Nacionales de Docentes en Administración Financiera SADAF*, Volumen 30, pp. 83-165.
- Haahtela, T., 2010. Recombining Trinomial Tree for Real Option Valuation with Changing Volatility. SSRN-Social Science Research Network.
- Haahtela, T., 2011 (a). Displaced Diffusion Binomial Tree for Real Option Valuation. SSRN <http://ssrn.com/abstrac=1932408>, pp. 1-30.
- Haahtela, T., 2011 (b) *Estimating Changing Volatility in Cash Flow Simulation Based Real Options Valuation with Regression Sum of Squared Error Method*, SSRN: Social Science Research Network.
- Haug Gaarder, E., 2007. *Derivatives: Models ond Models*. 1 ed. Chichester : John Wiley & Sons.
- Jabbour, G-Kramin, M-Young, S, 2001. Two-state Option Pricing: Binomial Models Revisited. *Journal of Futures Markets*, Noviembre, Volumen 21, pp. 987-1001.
- Jarrow, R-Rudd, A, 1982. Aproximate option valuation for arbitrary stochastic processes. *Journal of Financial Economics*, Volumen 10, pp. 347-369.
- Keema, A., 1988. *Options in Real and Financial Markets*, Erasmus: s.n.
- Kodukula, P.-Chandra, P., 2006. *Project Valuation using Real Options: A practiioner's guide*. s.l.:J Ross Publishing.
- Kulatilaka, N- Trigeorgis, L, 1994. The General Flexibility To Swicht: Real Options Revisited. *International Journal of Finance*, Issue 2, pp. 123-145.

- Kulatilaka, N., 1988. Valuing the Flexibility of Flexible Manufacturing Systems. *IEEE Transactions in Engineering Management*, Issue 22, pp. 250-257.
- Kulatilaka, N., 1995. Operating Flexibilities in Capital Budgeting: Substitutability and Complementary in Real Options. En: L. Trigeorgis, ed. *Real Options in Capital Investment: Models, Strategies and Applications*. Westport Conn.: Praeger.
- Mason, S- Merton, R, 1985. The Role of Contingent Claims Analysis in Corporate Finance. En: *Recent Advances in Corporate Finance*. New York: Homewood Irwin.
- Mc Donal, R - Siegel, J, 1986. Investment and the Valuation of Firms when here is an Option to Shut Down. *International Economic Review*, Issue 26, pp. 321-349.
- Merton, R, 1973. The Theory of Rational Options Pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, Primavera.pp. 141-183.
- Milanesi, G-Pesce, G-El Alabi, E, 2013. Technology-Based Start up Valuation using Real Opciones with Edgeworth Expansion. *Journal of Financial and Accounting*, 1(2), pp. 54-61.
- Milanesi, G-Tohmé F, 2014. Árboles Binomiales Implícitos, Momentos Estocásticos de Orden Superior y Valuación de Opciones. *Revista de Economía Política (REPBA)*, 12(7), pp. 45-72.
- Milanesi, G., 2013. Asimetría y Curtosis en el Modelo Binomial para valora Opciones Reales: caso de aplicación para empresas de base tecnológica. *Estudios Gerenciales Journal of Management and Economics for Iberoamerica*, 29(128), pp. 368-378.
- Milanesi, G., 2014. Modelo Binomial para la Valoración de Empresas y los efectos de la Deuda: Escudo Fiscal y Liquidación de la Firma. *Journal of Economics, Finance and Administrative Science*, 19(36), pp. 2-10.
- Milanesi, G. (2017): Opciones reales y función isoelástica de utilidad para valorar I&D e intangibles. *Escritos Contables y de Administración*, 6(2), 81-109
- Mun, J. (2015): *Real Options Analysis (Third Edition): Tools and Techniques for Valuing Strategic Investments and Decisions with Integrated Risk Management and Advanced Quantitative Decision Analytics* (3 ed.). CreateSpace Independent Publishing Platform.
- Myers, S- Majd, S, 1990. Abandonment Value and Project Life. *Advances in Futures and Options Research*, Issue 4, pp. 1-21.
- Myers, S., 1977. Determinants of Corporate Borrowing. *Journal of Financial Economics*, Issue 5, pp. 147-176.

- Pindyck, R., 1988. Irreversible Investment, Capacity Choice and the Value of the Firm. *American Economic Review*, Issue 78, pp. 969-985.
- Rendleman, R-Bartter, B, 1979. Two-state Option Pricing. *Journal of Finance*, Issue 34, pp. 1092-1110.
- Salahaldin, L. (2016): *Real Options as a Tool for Value Creation: Evidence from Sustainable Development and Information Technology Sectors*. Wiley-ISTE.
- Shockley, R. (2006): *An Applied Course in Real Options Valuation*. Thomson South-Western Finance.
- Smit, H-Trigeorgis, L, 2004. *Strategic Investment: Real Options and Games*. 1 ed. New Jersey(Estados Unidos): Princeton University Press.
- Smith, J-Nau, R, 1995. Valuing Risky Projects: Option Pricing Theory and Decision Anaysis. *Management Science*, Issue 5, pp. 795-816.
- Smit, H., 1996. The Valuating of Offshore Concessions in the Netherlands. *Financial Management*, Issue 26, pp. 5-17.
- Smith, J., 2005. Alternative Approach for Solving Real Options Problems. *Decision Analysis*, Issue 2, pp. 89-102.
- Taleb, N., 2004. *Fooled by Randomness: The Hidden Role of Chance in Life and Markets*. New York: Random House.
- Trigeorgis, L- Mason, S, 1987. Valuing Managerial Flexibiliy. *Midland Corporate Finance*, Volumen 5, pp. 14-21.
- Trigeorgis, L., 1988. A Conceptual Options Framework for Capital Budgeting. *Advances in Futures and Options Research*, Issue 4, pp. 145-167.
- Trigeorgis, L., 1991. A Log-Transformed Binomial Numerical Analysis Method for Valuing Compex Multi-Option Investments. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 26(3), pp. 309-326.
- Trigeorgis, L., 1993. Real Options and Interactions with Financial Flexibility. *Financial Management*, Issue 22, pp. 202-224.
- Trigeorgis, L., 1995. *Real Options in Capital Investment: Models, Strategies and Applications*. 1 ed. London(United Kindgon): Praeger.
- Trigeorgis, L., 1997. *Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocations*. 2 ed. Cambridge: MIT Press.
- Wang, A-Halal, W, 2010. Comparision of Real Asset Valuation Models: A Literature Review. *International Journal of Business and Management*, Issue 5, pp. 14-24.

Wilmott, P, 2009. *Frequently Asked Questions in Quantitative Finance*. Segunda ed. United Kingdom: John Wiley & Sons.

[illegible]

|                |             |             |             |             |          |         |         |
|----------------|-------------|-------------|-------------|-------------|----------|---------|---------|
| Horizontes     | 1           | 2           | 3           | 4           | 5        | 10      | 20      |
| Probabilidades | 70,511%     | 49,718%     | 35,056%     | 24,719%     | 17,429%  | 3,038%  | 0,092%  |
| $\Sigma(p)$    | 29,489%     | 41,586%     | 43,984%     | 41,351%     | 36,447%  | 12,705% | 0,772%  |
|                | 100,000%    | 8,696%      | 18,395%     | 25,941%     | 30,485%  | 23,910% | 3,067%  |
|                | $\Sigma(p)$ | 100,000%    | 2,564%      | 7,233%      | 12,750%  | 26,666% | 7,696%  |
|                |             | $\Sigma(p)$ | 100,000%    | 0,756%      | 2,666%   | 19,517% | 13,679% |
|                |             |             | $\Sigma(p)$ | 100,000%    | 0,223%   | 9,795%  | 18,306% |
|                |             |             |             | $\Sigma(p)$ | 100,000% | 3,414%  | 19,140% |
|                |             |             |             |             |          | 0,816%  | 16,009% |

|             |          |          |
|-------------|----------|----------|
|             | 0,128%   | 10,880%  |
|             | 0,012%   | 6,067%   |
|             | 0,000%   | 2,791%   |
| $\Sigma(p)$ | 100,000% | 1,061%   |
|             |          | 0,333%   |
|             |          | 0,086%   |
|             |          | 0,018%   |
|             |          | 0,003%   |
|             |          | 0,000%   |
|             |          | 0,000%   |
|             |          | 0,000%   |
|             |          | 0,000%   |
|             |          | 0,000%   |
| $\Sigma(p)$ |          | 100,000% |

Tabla 2: Probabilidades nodos finales modelo CRR

| Horizontes                            | 1                | 2                | 3                | 4                | 5                | 10               | 20               |
|---------------------------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\Sigma(p) \times C_{t \times e-ert}$ | \$ 223,01        | \$ 221,78        | \$ 207,17        | \$ 186,06        | \$ 162,66        | \$ 66,96         | \$ 7,59          |
|                                       | \$ 28,26         | \$ 83,17         | \$ 139,11        | \$ 184,46        | \$ 215,39        | \$ 204,66        | \$ 49,73         |
| <b>Co</b>                             | <b>\$ 251,27</b> | \$ 0,22          | \$ 17,63         | \$ 51,88         | \$ 96,42         | \$ 271,33        | \$ 153,72        |
|                                       | <b>Co</b>        | <b>\$ 305,17</b> | \$ -             | \$ 0,18          | \$ 12,22         | \$ 200,72        | \$ 297,40        |
|                                       |                  | <b>Co</b>        | <b>\$ 363,91</b> | \$ -             | \$ -             | \$ 87,06         | \$ 402,62        |
|                                       |                  |                  | <b>Co</b>        | <b>\$ 422,58</b> | \$ -             | \$ 19,59         | \$ 403,50        |
|                                       |                  |                  |                  | <b>Co</b>        | <b>\$ 486,68</b> | \$ 0,09          | \$ 308,33        |
|                                       |                  |                  |                  |                  |                  | \$ -             | \$ 181,67        |
|                                       |                  |                  |                  |                  |                  | \$ -             | \$ 81,90         |
|                                       |                  |                  |                  |                  |                  | \$ -             | \$ 27,06         |
|                                       |                  |                  |                  |                  |                  | \$ -             | \$ 5,58          |
|                                       |                  |                  |                  |                  | <b>Co</b>        | <b>\$ 850,40</b> | \$ 0,03          |
|                                       |                  |                  |                  |                  |                  |                  | \$ -             |
|                                       |                  |                  |                  |                  |                  |                  | \$ -             |
|                                       |                  |                  |                  |                  |                  |                  | \$ -             |
|                                       |                  |                  |                  |                  |                  |                  | \$ -             |
|                                       |                  |                  |                  |                  |                  |                  | \$ -             |
|                                       |                  |                  |                  |                  |                  |                  | \$ -             |
|                                       |                  |                  |                  |                  |                  |                  | \$ -             |
|                                       |                  |                  |                  |                  |                  |                  | \$ -             |
|                                       |                  |                  |                  |                  |                  | <b>Co</b>        | <b>\$ 706,01</b> |

Tabla 3: Valores expandidos (ecuación 5)

| Black-Scholes | 1                | 2                | 3                | 4                | 5                | 10               | 20               |
|---------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| d1            | 2,538            | 2,155            | 2,054            | 2,033            | 2,047            | 2,253            | 2,732            |
| d2            | 2,428            | 1,999            | 1,863            | 1,813            | 1,801            | 1,905            | 2,240            |
| N(d1)         | 0,994            | 0,984            | 0,980            | 0,979            | 0,980            | 0,988            | 0,997            |
| N(d2)         | 0,992            | 0,977            | 0,969            | 0,965            | 0,964            | 0,972            | 0,987            |
| <b>Co</b>     | <b>\$ 239,22</b> | <b>\$ 277,04</b> | <b>\$ 312,93</b> | <b>\$ 346,86</b> | <b>\$ 378,97</b> | <b>\$ 516,42</b> | <b>\$ 706,24</b> |

Tabla 4: Valores BS (ecuación 1)