ASOCIACION ARGENTINA
DE ECONOMIA POLITICA

ANALES | ASOCIACION ARGENTINA DE ECONOMIA POLITICA

XLIV Reunión Anual

Noviembre de 2009

ISSN 1852-0022
ISBN ISBN 978-987-99570-7-3

EL TM-CORE EN LOS JUEGOS NTU: DEFINICIÓN Y CARACTERIZACIÓN AXIOMÁTICA

Arribillaga, Roberto Pablo

El $\mathcal{TM}$-Core en los juegos NTU: Definición y caracterización axiomática.

Roberto Pablo Arribillaga [a,b]

[a] Instituto de Matemática Aplicada San Luis (UNSL-CONICET)
Av. Ejército de los Andes 950, 5700 San Luis, Argentina
(rarribi@unsl.edu.ar)
y
[b]Departamento de Matemática (U.N. San Luis)
Chacabuco y Pedernera, 5700 San Luis, Argentina

Resumen

En este trabajo introducimos un concepto solución tipo core para juegos con utilidades no transferibles: el $\mathcal{TM}-core$. Los elementos en el $\mathcal{TM}-core$ son pares ordenados $(x, \mathcal{B})$ de vectores y familias balanceadas minimales de coaliciones (siguiendo Cesco 2008). Este concepto cumple la importante propiedad de ser no vacío para cualquier juego NTU y coincide con el core clásico cuando el juego es balanceado y no nivelado. Damos una caracterización axiomática de este concepto, en término de *NE, IR* y *RGP* (usados en Peleg [1985] con apropiadas modificaciones) y un axioma adicional de independencia de alternativas irrelevantes *(IAI),* sobre la clase juegos *casi no nivelados,* la cual incluye la clase de los juegos no nivelados con core no vacío, usada en Peleg [1985] para caracterizar el core.
Código JEL: C71
Palabras claves: *Core, Familias Balanceadas, Axiomas*

Abstract

In this work we introduce one core-type solutions for games with Nontransferable Utility: the $\mathcal{TM}-core$. The elements in the $\mathcal{TM}-core$ are pairs $(x, \mathcal{B})$ of vectors and minimal balanced families of coalitions (following Cesco [2008]). This concept is non-empty for any NTU-game and coincides with the classical core when the games is balanced and non nivelled. We present a axiomatic characterization of the $\mathcal{TM}-core$, in terms of *NE, IR* and *RGP* (used in Peleg [1985] with appropriate modifications) and one additional axiom of independence of irrelevant alternative *(IAI),* on the class of the *quasi non nivelled* games, which include the class of the non nivelled games with core no empty, used in Peleg [1985] to characterize the classical core.
Código JEL: C71.
Keywords: *Core, Banlanced Families, Axioms*

1. Introducción

A la teoría de juegos cooperativos la podemos de alguna manera centrar en dos grandes clases de juegos los Juegos con Utilidades Transferibles (TU games) y lo Juegos con Utilidades no Transferibles (NTU games); y a su vez estos últimos se pueden ver como una generalización de los primeros. Los trabajos en los juegos NTU tienen un grado de complejidad mayor a que se encuentra en los juegos TU. Muchos de los conceptos y avances obtenidos en los juegos NTU han surgido de generalizaciones de resultados que se han logrado primero en en los juegos TU. Por ejemplo los conceptos de conjuntos estables, core, valor y bargaining set, entre otros, fueron definidos primero en los juegos TU y luego en los NTU.

Nuestro trabajo también esta en esta dirección porque generaliza a los juegos NTU un concepto solución tipo core, introducido por Cesco (2008) en los juegos TU. En ese trabajo se muestra que el mismo es una extensión del core (en el sentido que coincide con el core cuando éste es no vacío) y además es no vacío para cualquier juego TU, dando por último una caracterización axiomática de este nuevo concepto. Nosotros extendemos el concepto de $\mathcal{M} - core$ a los juegos NTU. Los elementos en el $\mathcal{M} - core$ son pares ordenados $(x, \mathcal{B})$ de vectores y familias balanceadas minimales de coaliciones. Aquí también probamos que el $\mathcal{M} - core$ es no vacío para cualquier juego NTU y es una extensión del core clásico en los NTU, en el sentido que el core clásico siempre esta incluido en el $\mathcal{M} - core$ y que cuando el juego es balanceado las soluciones coinciden.

Para abordar el tema de la caracterización es importante recordar que el trabajo realizado por Peleg (1985), que da una caracterización axiomática del core clásico se restringe a la clase de los juegos no nivelados con core no vacío. En ese trabajo se caracteriza al core clásico, en término de los axiomas de: No Vacío (NE); Individualmente Racional (IR) y la Propiedad del Juego Reducido (RGP). Un defecto que se podría pensar del core clásico es que si tenemos un juego que no sea no nivelado podrían haber puntos en el core clásico que son débilmente dominados por puntos que están dentro del mismo conjunto. En la primera parte de nuestro trabajos nos preocupamos por introducir un concepto que elimine estos puntos y damos una caracterización de este nuevo concepto en término de NE, IR, RGP sobre la clase de los juegos casi no nivelados con core no vacío que incluye la clase que se dan en la caracterización de Peleg (1985).

Al intentar caracterizar el $\mathcal{M} - core$ también parece central hablar de juegos no nivelados pero aun esto es insuficiente. En el $\mathcal{M} - core$ también tenemos el inconveniente de que hay puntos que son débilmente dominados por puntos del mismo conjunto (esto no ocurre cuando miramos un juego TU, como se puede ver en Cesco 2008). Ahora, si sacamos los puntos que están débilmente dominados, nos quedamos con un refinamiento, generamos el concepto central de nuestro trabajo, el cual es no vacío para cualquier juego NTU. Además si el juego es no nivelado (condición que se pide en la caracterización de Peleg (1985)) tenemos que el core clásico está incluido en el $\mathcal{TM} - core$ y si pedimos también la condición de balance el $\mathcal{TM} - core$ coincide con el core clásico. Aclaremos en este punto que en los juegos TU la condición de no nivelado se cumple trivialmente. Esto da las herramientas para ver al el $\mathcal{TM} - core$ en los juegos NTU como una extensión del $\mathcal{M} - core$ introducido por Cesco (2008) en los juegos TU; en el sentido que si miramos un juego TU dentro de los NTU el $\mathcal{TM} - core$ coincide con el $\mathcal{M} - core$ de Cesco.

Para el $\mathcal{TM} - core$ damos una caracterización axiomática en término de los axiomas de NE, IR y RGP, con apropiadas modificaciones al nuevo concepto, y un axioma adicional de independencia de alternativa irrelevante (IAI).

El trabajo tiene la siguiente organización. En la primera sección introducimos un refinamiento del core clásico que elimina del core todos los elementos que son débilmente dominados; mostramos que este concepto es no vacío si sólo si el core es no vacío y vemos que este concepto cumple los axiomas de NE, IR y RGP. En la primera parte de la sección 3 introducimos el $\mathcal{M} - core$ y, por medio de un refinamiento, el concepto central del trabajo el $\mathcal{TM} - core$. Probando que ambos conceptos tienen la propiedad de ser no vacíos para cualquier juego NTU y mostrando interesantes relaciones de estos conceptos con el core clásico. En la parte final de la sección 3 damos un caracterización axiomática del $\mathcal{TM} - core$ en termino de los axioma de NE, IR, RGP y IAI.

2. El $\mathcal{T}$-Core

2.1. Los NTU games y el $\mathcal{T}$-Core

Antes de introducir el nuevo concepto daremos algunas definiciones que nos presenten el modelo y algunos resultados ya obtenidos en los juegos con utilidades no transferibles (juegos NTU). Para comenzar, los juegos NTU son juegos cooperativos que quedan definidos por un conjunto de jugadores N y un función que a cada subconjunto S de N le asigna un subconjunto de $\mathbf{R}^S$, (que cumple algunas propiedades) que se interpretan como los posibles pagos que puede obtener la coalición S. Vayamos ahora a la definición precisa del concepto.

Definición 1 *Un juego con utilidades no transferibles (NTU game) es un par (N, V) donde N es un conjunto (finito) de jugadores y V es una función que asocia a cada coalición $S \subset N$ un subconjunto V_S de $\mathbf{R}^S$ tal que:*
(i) $V_S \neq \varnothing$ *si* $S \neq \varnothing$ *y* $V_\varnothing = \varnothing$.
(ii) V_S *es comprensible.*
(iii) V_S *es cerrado.*
(iv) $V_S \cap (x^S + \mathbf{R}_+^S)$ *es acotado para cada* $x^S \in \mathbf{R}^S$.

Nota 1 *Decimos que un conjunto $B \subset \mathbf{R}^S$ es compresible si dados x, y tales que $y \geq x$ [1]; $y \in B$ implica que $x \in B$.*

Recordemos ahora la definición clásica de core para un juego NTU introducida por Aumann (1961). Este concepto surge a partir de eliminar del conjunto de pre-imputaciones V_N las asignaciones, que pueden ser objetadas por una coalición. En este concepto decimos que la coalición S objeta (fuertemente) la asignación x si existe $y^S \in V_S$ tal que $y^S >> x^S$ (esto es si $x^S \notin intV_S$); pues los jugadores de S pueden obtener el pago y^S que mejor a todos sus integrantes. Veamos la definición formal.

Durante el resto del trabajo siempre que pongamos (N, V) entenderemos que nos referimos a un juego con utilidades no transferibles.

Definición 2 *El core de (N, V) son todas las pre-imputaciones que no son objetadas por ninguna coalición S incluida en N. Lo denotaremos por $C(N, V)$*

$$C(N, V) = \{x \in V_N : x^S \notin intV_S \quad \forall S \subset N\}$$

Hay un resultado clásico de existencia probado por Scarf (1967). Para ver el resultado de Scarf necesitamos la noción de *familia balanceada* (concepto importante a lo largo de nuestro trabajo). Una familia no vacía de coaliciones $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(N)$ es balanceada si existe un conjunto de números reales positivo $\Lambda = (\lambda_S)_{S \in \mathcal{B}}$ tales que $\sum_{\substack{S \in \mathcal{B} \\ S \ni i}} \lambda_S = 1$, para todo $i \in N$. Los números $(\lambda_S)_{S \in \mathcal{B}}$ son llamados pesos de balance para $\mathcal{B}$.

Definición 3 *Un juego (N, V) es balanceado si:*
$\cap_{S \in \mathcal{B}} V(S) \subset V_N$ para toda familia balanceada $\mathcal{B}$. Donde $V(S) = V_S \times \mathbf{R}^{N \setminus S}$

Teorema 1 *(Scarf 1967) Si (N, V) es balanceado, entonces $C(N, V) \neq \varnothing$*

El concepto de core es ampliamente aceptado en toda la literatura pero en los juegos NTU podemos tener puntos en el core que son débilmente dominados por otros puntos en el core. Estos puntos podrían ser eliminados y producir así un refinamiento del core. En esta dirección esta nuestro nuevo concepto de $\mathcal{T}$-core.

Definición 4 *El $\mathcal{T}$-core de (N, V) son todas las imputaciones que están en el core que no son dédilmente dominadas por otro elemento del core Lo denotaremos por $C_{\mathcal{T}}(N, V)$.*

$$C_{\mathcal{T}}(N, V) = \{x \in C(N, V) : \nexists y \in C(N, V) \ \textit{tal que} \ y > x\}$$

[1] Diremos que: $y \geq x$ si $y_i \geq x_i$ para todo i; $y > x$ si $y_i \geq x_i$ para todo i y existe j tal que $y_j > x_j$; $y >> x$ si $y_i > x_i$ para todo i .

Notar que los elementos del $C_{\mathcal{T}}$ son los elementos de core clásico que no están débilmente dominados por un elemento de V_N.

Veamos ahora algunas relaciones interesantes, pero antes presentaremos unas clases de juegos que usaremos a lo largo del trabajo.

Dado un conjunto $A \subset \mathbf{R}^S$ se dice que A es *no nivelado* si dado $y, x \in \partial A$ [2] tales que $y \geq x$ tenemos que $y = x$.

Definición 5 *Decimos que* (N, V) *es* ***no nivelado*** *si* V_S *es no nivelado* $\forall S \subset N$. *Diremos además que el juego es* ***casi no nivelado*** *si* V_S *es no nivelado* $\forall S \subsetneqq N$.

Nota 2 *a)* $C_{\mathcal{T}}(N, V) \subset C(N, V)$ *para todo juego* (N, V)
b) Dado un juego (N, V) *si* V_N *es no nivelado, entonces* $C_{\mathcal{T}}(N, V) = C(N, V)$. *Esto es inmediato a partir de la definición de no nivelado. Notar que todos los juegos no nivelados, en los cuales entra los TU games (mirados como NTU games), cumplen que* V_N *es no nivelado.*

Para ver que la inclusión en la nota 2*a)* es estricta basta ver un juego donde V_N sea no no nivelado y en el core hallan puntos que son débilmente dominados por otros puntos del core

Lema 1 *Dado* (N, V), *tenemos que* $C_{\mathcal{T}}(N, V) \neq \varnothing$ *si y sólo si* $C(N, V) \neq \varnothing$

Demostración

Si $C_{\mathcal{T}}(N, V) \neq \varnothing$ el hecho de que $C(N, V) \neq \varnothing$ es inmediato

Si $C(N, V) \neq \varnothing$, sea $x \in C(N, V)$. Si $x \in C_{\mathcal{T}}(N, V)$ no hay nada que probar. Ahora si $x \notin C_{\mathcal{T}}(N, V)$, sea $z^1 = \sup\{y^1 : (y^{\{1\}}, x^{N \setminus \{1\}}) \in V_N\}$. Como $V_N \cap (x + \mathbf{R}^N_+)$ es acotado y $x \in V_N$ tenemos que z^1 esta bien definido. Además como V_N es acotado tenemos que $z_1 = (z^1, x^{N \setminus \{1\}}) \in V_N$. Sea ahora $z^2 = \sup\{y^2 : (y^{\{2\}}, z_1^{N \setminus \{1\}}) \in V_N\}$, como $V_N \cap (z_1 + \mathbf{R}^N_+)$ es acotado y $z_1 \in V_N$ tenemos que z^2 esta bien definido. Además como V_N es acotado tenemos que $z_2 = (z^1, z_1^{N \setminus \{1\}}) \in V_N$. Así continuo hasta la construcción $z_N \in V_N$. Es claro que $z_N > z_{N-1} > ... > z_2 > z_1 > x$ por tanto $z_N \in C(N, V)$. Además si existe $y \in V_N$ tal que $y > z_N$ sea i tal que $y^i > z^i$. Tenemos que $y' = (z^1, z^2, ...z^{i-1}, y^i, x^{i+1}, ..x^n) < y$. Por tanto $y' \in V_N$ (pues V_N es comprensible), pero $y^i > z^i$ lo cual contradice la definición de z^i. Por tanto no exsite $y \in V_N$ tal que $y > z_N$, lo que prueba que $z_N \in C_{\mathcal{T}}(N, V)$. Lo que termina la prueba de que $C_{\mathcal{T}}(N, V) \neq \varnothing$.■

2.2. Una axiomatización del $\mathcal{T}$-Core

Daremos una axiomatización del $\mathcal{T}$-core, que sigue muy de cerca al trabajo de Peleg (1985), pero que extenderemos a la clase de los juegos casi no nivelados con core no vacío

Notaremos por Γ a un subconjunto arbitrario de todos los juegos NTU

Una *solución* σ sobre Γ es una función que a cada $(N, V) \in \Gamma$ le asigna un subconjunto $\sigma(N, V) \subset X^*(N, V)$,donde $X^*(N, V) = \{x : x^N \in V_N\}$ es el conjunto de pagos factibles para el juego (N, V).

Recordemos ahora algunos axiomas:

Una solución σ es *no vacía* (NE) sobre Γ si $\sigma(N, V) \neq \varnothing$ para cada $(N, V) \in \Gamma$.

Una solución σ es *optima de Pareto* (PO) sobre Γ si se cumple que $x \in \sigma(N, V)$, entonces $x \in \partial V_N$ para cada$(N, V) \in \Gamma$. En este trabajo usaremos un axioma de optimo de Pareto fuerte (SPO) y decimos que una solución σ es *optima de Pareto fuerte* (SPO) sobre Γ, si tenemos que $x \in \sigma(N, V)$,entonces $\nexists y \in V_N$ tal que $y > x$ para cada $(N, V) \in \Gamma$(notar que $(SPO) \Rightarrow (PO)$).

Una solución σ es *individualmente racional* (IR) sobre Γ si vale que, si $x \in \sigma(N, V)$, entonces $x^{\{i\}} \notin intV_{\{i\}}$ para todo $i \in N$, para cada $(N, V) \in \Gamma$.

Vamos ahora introducir el axioma más importante (que es el condiciona el trabajo de Peleg 1985 a trabajar con los juegos no nivelados)

[2] Notareos con ∂A al borde del conjunto A.

Definición 6 *Sea* $(N,V) \in \Gamma$; $x \in X^*(N,V)$ *y sea* $\varnothing \neq S \subset N$. *El* ***juego reducido con respecto a*** S ***y*** x *es el juego* $(S, V_{S,x})$ *definido por:*
$V_{S,x}(S) = \{y^S \in \mathbf{R}^S : (y^S, x^{N\setminus S}) \in V_N\}$
$V_{S,x}(T) = \cup_{Q\subset N\setminus S}\{y^T \in \mathbf{R}^T : (y^T, x^Q) \in V_{T\cup Q}\}$

Definición 7 *Una solución* σ *sobre* Γ *tiene* ***la propiedad del juego reducido*** *(RGP) si satisface lo siguiente: si* $(N,V) \in \Gamma, x \in \sigma(N,V)$ *y sea* $\varnothing \neq S \subset N$, *entonces* $(S, V_{S,x}) \in \Gamma$ *y* $x^S \in \sigma(S, V_{S,x})$.

Antes de ir a nuestros resultados veremos la caracterización del core dada por Peleg (1985) en término de los axiomas NE, IR y RGP.

Introduzcamos la notación necesaria. Sea. $\mathcal{U}$ un conjunto infinito de jugadores y sea $\Gamma_{\mathcal{U}}$ la clase de todos NTU (N,V) tales que $N \subset \mathcal{U}$.

Teorema 2 *(Peleg 1985) Sea* $\Gamma^{\mathcal{C}} \subset \Gamma_{\mathcal{U}}$ *la clase de los juegos no nivelados con core no vacío. Entonces existe una única solución sobre* $\Gamma^{\mathcal{C}}$ *que satisface NE, IR y RGP, y esta solución es el core.*

Ya hemos visto que en $\Gamma^{\mathcal{C}}$ (en realidad en una clase más amplia de juegos) el $\mathcal{T}$-Core y el core coinciden por tanto es inmediato que $\mathcal{T}$-Core satisface NE, IR y RGP sobre $\Gamma^{\mathcal{C}}$. Pero poder ampliar la caracterización del $\mathcal{T}$-Core a la clase de los juegos casi no nivelados con core no vacío (que claramente incluye a $\Gamma^{\mathcal{C}}$) nos daría la idea precisa que nos ayudará a caracterizar nuestro concepto central de $\mathcal{TM}$-Core en la sección siguiente; esto, por una cuestión técnica, aún no se ha podido lograr, pero tenemos importantes propiedades para el $\mathcal{T}$-Core.

Sea $\Gamma^{\mathcal{CC}} \subset \Gamma_{\mathcal{U}}$ la clase de todos lo juegos casi no nivelados con core no vacío incluidos en $\Gamma_{\mathcal{U}}$.

Teorema 3 *El* $\mathcal{T}$*-Core satisface NE, IR, y RGP sobre* $\Gamma^{\mathcal{CC}}$.

Demostración

NE se deduce de la nota 1. IR se deduce de la nota 2 y el hecho de que el core es IR.

Veamos ahora RGP. Sea $x \in C_{\mathcal{T}}(N,V)$. y sea $\varnothing \neq S \subset N$. El hecho de que $(S, V_{S,x}) \in \Gamma^{\mathcal{CC}}$ se puede ver en Peleg (1985) (con la consideración de que el hecho de ser V_N no nivelado no es usada para probar que $V_{S,x}(T)$ es no nivelado para todo $T \subsetneqq S$)

Además: i) $x \in V_N$ luego $x^S \in V_{S,x}(S)$.

ii) si $x^T \in intV_{S,x}(T)$ para algún $T \subsetneqq S$. Tenemos que existe $y^T >> x^T$ tal que $(y^T, x^Q) \in V_{T\cup Q}$ para algún $Q \subset N \setminus S$. Luego como $V_{T\cup Q}$ es no nivelado (pues $T \cup Q \subsetneqq N$)y comprensivo tenemos que $(x^T, x^Q) \in intV_{T\cup Q}$ lo que es un absurdo porque $x \in C_{\mathcal{T}}(N,V)$.

iii) si existe $y^S \in V_{S,x}(S)$ tal que $y^S > x^S$. Tenemos que $y = (y^S, x^{N\setminus S}) \in V_N$ y que $y > x$, lo cual es una contradicción porque $x \in C_{\mathcal{T}}(N,V)$.

Por tanto tenemos que $x^S \in C_{\mathcal{T}}(S, V_{S,x})$ con lo que termina la prueba.■

Lema 2 *Si una solución* σ *sobre* Γ *satisface IR y RGP, entonces* σ *es SPO sobre* Γ

Demostración

Sea $(N,V) \in \Gamma$, $x \in \sigma(N,V)$. Supongamos que existe $y \in V_N$. Tal que $y > x$. Sea $i \in N$ tal que $y^{\{i\}} > x^{\{i\}}$ y sea $S = \{i\}$. Tenemos por RGP que $x^{\{i\}} \in \sigma(S, V_{S,x})$. Como $y \in V_N$, $y > x$; y V_N es comprensivo tenemos que $(y^{\{i\}}; x^{N\setminus\{i\}}) \in V_N$ por tanto $y^{\{i\}} \in V_{S,x}\{i\}$ y como $y^{\{i\}} > x^{\{i\}}$ tenemos que $x^{\{i\}} \in intV_{S,x}\{i\}$ ($V_{S,x}\{i\}$ es comprensivo). Lo cual es un absurdo porque σ es IR.■

Corolario 1 *El* $\mathcal{T}$*-Core satisface SPO sobre* $\Gamma^{\mathcal{CC}}$

Lema 3 *Si una solución* σ *sobre* Γ *satisface IR y RGP, entonces* $\sigma(N,V) \subset C_{\mathcal{T}}(N,V)$ *para todo* $(N,V) \in \Gamma$

Demostración

Por lema anterior tenemos que $\sigma(N,V)$ es SPO. Supongamos que existe $x \in \sigma(N,V) \setminus C_{\mathcal{T}}(N,V)$. Luego existe $\varnothing \neq S \subsetneq N$ talque $x^S \in intV_S$. Sea $i \in S$; $j \notin S$ y $T = \{i,j\}$. Tenemos por RGP que $x^T \in \sigma(T, V_{T,x})$ Pero $x^S \in intV_S = intV_{S\setminus\{i\}\cup\{i\}}$y como $S \setminus \{i\} \subset N \setminus T$, tenemos que $x^{\{i\}} \in intV_{T,x}\{i\}$ (por definición de $V_{T,x}(\{i\})$) lo cual es una contradicción, pues σ es IR.■

3. El $\mathcal{M}$-Core y $\mathcal{TM}$-Core

3.1. El $\mathcal{M}$-Core

Antes de pasar a la definición del concepto solución central de nuestro trabajo el, $\mathcal{TM}$-Core, introduciremos un concepto anterior.

Miremos en más detalle las familias balanceadas. Si la familia balanceada $\mathcal{B}$ no contiene propiamente otra familia balanceada se dice que es minimal. En este caso el conjunto de pesos de balance es único (Shapley 1967). Es claro que el teorema de Scarf vale si solo tomamos las familias minimales. De ahora en adelante siempre que digamos familia balanceada nos referimos a una minimal, y al conjunto de todas las familias balanceadas minimales del conjunto N lo denotamos por $\mathcal{M}(N)$.

Dado un juego NTU, V_S se puede interpretar como los posibles pagos que puede obtener la coalición S si se reúne. Teniendo esto en mente, definimos los posibles pagos para una familia balanceada $\mathcal{B}$ como:

$V_{\mathcal{B}} = \{x \in \mathbf{R}^N : x^S \in V_S \ \forall S \in \mathcal{B}\}$;(Observar que $V_{\mathcal{B}} = \cap_{S\in\mathcal{B}} V(S)$.);

definimos los "posibles pagos"(en un nuevo contexto) del juego como:

$W_V = \cup_{\mathcal{B} \in \mathcal{M}(N)} V_{\mathcal{B}}$

Notar que ahora llamaremos los posibles pagos a aquellos pagos que se pueden obtener con alguna familia balanceada. Esta idea (siguiendo a Cesco 2009) trata de rescatar, el hecho que las familias balanceadas es un buen concepto que representa una forma de organizar la participación de los jugadores en más de una coalición; el peso de balance nos indicaría cual sería la "dedicación"que cada coalición le exige a sus miembros.

Es claro que existe $\mathcal{B}$ (al menos la formada por todos los singles) tales que $V_{\mathcal{B}} \neq \varnothing$. Veamos que los conjuntos $V_{\mathcal{B}}$ que sean no vacios satisfacen las propiedades i) a iv) dadas para V_N en la definición de un juego NTU. Veamos que :

a)$V_{\mathcal{B}}$ es comprensivo. Tenemos que si $y \geq x$; con $y \in V_{\mathcal{B}}$, entonces $y^S \in V_S$ para toda $S \in \mathcal{B}$, luego como los V_S son comprensivos tenemos que $x^S \in V_S$ para toda $S \in \mathcal{B}$, por tanto $x \in V_{\mathcal{B}}$. Lo que prueba que $V_{\mathcal{B}}$ es comprensivo.

b) $V_{\mathcal{B}}$ es cerrado. Tenemos que $V_{\mathcal{B}} = \cap_{S\in\mathcal{B}} V(S)$, como V_S son cerrado $V(S)$ son cerrados (recordar que $V(S) = V_S \times \mathbf{R}^{N\setminus S}$), luego $V_{\mathcal{B}}$ es cerrado por ser intersección finita de cerrados

c) Veamos $V_{\mathcal{B}} \cap (x + \mathbf{R}^N_+)$ es acotado para todo $x \in \mathbf{R}^N$. Sea $x \in \mathbf{R}^N$, tenemos que $V_{\mathcal{B}} \cap (x + \mathbf{R}^N_+) = \{\cap_{S\in\mathcal{B}} V(S)\} \cap (x+\mathbf{R}^N_+) = \cap_{S\in\mathcal{B}} \{V_S \times \mathbf{R}^{N\setminus S} \cap (x+\mathbf{R}^N_+)\} = \cap_{S\in\mathcal{B}} \{V_S \cap (x^S + \mathbf{R}^S_+) x \ \mathbf{R}^{N\setminus S}\}$, pero $V_S \cap (x^S + \mathbf{R}^S_+)$ es acotado y ademas como $\cup_{S \in\mathcal{B}} S = N$, nos da que $\cap_{S\in\mathcal{B}} \{V_S \ \cap (x^S + \mathbf{R}^S_+) x \ \mathbf{R}^{N\setminus S}\}$ es acotado, por tanto $V_{\mathcal{B}} \cap (x + \mathbf{R}^N_+)$ es acotado.

Con la observación anterior y el hecho que W_V es una unión finita de los $V_{\mathcal{B}}$(la cantidad de familias balanceadas minimales es finita) tenemos el siguiente lema:

Lema 4 *W_V satisface las propiedades i) a iv) dadas para V_N en la definición de un juego NTU.*

Llamaremos *M-pre imputación* al conjunto definido como:
$A_{\mathcal{M}}(N,V) = \{(x,\mathcal{B}) \in \mathbf{R}^N \times \mathcal{M}(N) : x^S \in \partial V_S$ para toda $S \in \mathcal{B}\}$. Obserbe que $A_{\mathcal{M}}(N,V)$ siempre es no vacío (pues si $\mathcal{B}$ es la coalición formada por todos los singles existe x tal que $(x,\mathcal{B}) \in A_{\mathcal{M}}(N,V)$). En algunos casos notaremos $A_{\mathcal{M}}(N,V)$ solo con $A_{\mathcal{M}}$ cuando sea claro a que juego nos referimos.

Diremos que una $\mathcal{M}$-pre imputación $(x, \mathcal{B})$ es *bloqueada* por otra $\mathcal{M}$-pre imputación $(x', \mathcal{B}')$ si existe $T \in \mathcal{B}'$ tal que $x'_i > x_i$ para todo $i \in T$.

Definición 8 *El* M***-core*** *de* (N, V) *son todas las* $\mathcal{M}$*-pre imputaciones que no son bloqueadas por ninguna otra* $\mathcal{M}$*-pre imputación. Lo denotaremos por* $C_{\mathcal{M}}(N, V)$.
$C_{\mathcal{M}}(N, V) = \{(x, \mathcal{B}) \in A_{\mathcal{M}} : \nexists (x', \mathcal{B}') \in A_{\mathcal{M}}$ *tal que* $x'_i > x_i$ *para todo* $i \in T$ *para algún* $T \in \mathcal{B}'\}$

Cuando sea claro pondremos $C_{\mathcal{M}}$ en lugar de $C_{\mathcal{M}}(N, V)$.

Proposición 1 *Una* $\mathcal{M}$*-pre imputación está en* $C_{\mathcal{M}}$ *si y sólo si* $x^T \notin intV_T$ *para todo* $T \notin \mathcal{B}$.

$$C_{\mathcal{M}} = \{(x, \mathcal{B}) \in A_{\mathcal{M}} : x^T \notin intV_T \ \forall T \notin \mathcal{B}\}$$

Demostración.
Sea $(x, \mathcal{B}) \in C_{\mathcal{M}}$ supongamos que $\exists T \notin \mathcal{B}$ tal que $x^T \in intV_T$. Sea y$^T >> x^T$ tal que $y \in \partial V_T$, hagamos y=$(y^T, y^{N \setminus T})$ con $y^{N \setminus T} \in \partial V_{N \setminus T}$. Si $\mathcal{B}' = \{T, N \setminus T\}$, tenemos que $(y, \mathcal{B}')$, bloquea $(x, \mathcal{B})$ lo cual es una contradicción.

Ahora sea $(x, \mathcal{B}) \in A_{\mathcal{M}}$ tal que$x^T \in intV_T$ para todo $T \notin \mathcal{B}$. Supongamos que $(x, \mathcal{B}) \notin C_{\mathcal{M}}$. Luego $\exists (x', \mathcal{B}') \in A_{\mathcal{M}}$ tal que $x'_i > x_i$ para todo $i \in T$ para algún $T \in \mathcal{B}'$. Por tanto como $x'^T \in \partial V_T$, por ser V_T comprensivo $x^T \in intV_T$, lo cual es una contradicción.■

Definición 9 *El juego* (N, V^B) *es el* ***cubrimiento balanceado*** *de* (N, V) *si:* $V_N^B = W_V$ *y* $V_S^B = V_S \ \forall S \subsetneq N$

Notar que por lema 4 (N, V^B) está bien definido como un juego NTU.

Teorema 4 *El* $\mathcal{M}$*-core es no vacío para todo juego NTU.*

Demostración
Dado un juego NTU (N, V) , consideremos el cubrimiento balanceado (N, V^B).Tenemos que (N, V^B) es balanceado. Luego por el teorema de Scarf $C(N, V^B) \neq \varnothing$. Sea $x \in C(N, V^B)$. Luego $x \in \partial V_N^B$ y $x^T \notin intV_T^B \ \forall T \subset N$. Por definición de V^B y el hecho que $V_N \subset V_N^B$, tenemos que existe $\mathcal{B} \in \mathcal{M}(N)$ tal que $x \in V_{\mathcal{B}}$ y $x^T \notin intV_T \ \forall T \subset N$. Por tanto por proposición **??** tenemos que $(x, \mathcal{B}) \in C_{\mathcal{M}}(N, V)$. Por lo que $C_{\mathcal{M}}(N, V)$ es no vacío.

Veamos ahora algunos lemas importantes que nos permiten ver que relación exsite entre el el core clásico y el nuevo concepto introducido $\mathcal{M}$-Core, que como vimos en el teorema anterior es siempre no vacío. El primer lema nos dice que si el juego es balanceado las asignaciones que están en el core son las misma que están en el $\mathcal{M}$-Core.

Lema 5 *Sea* (N, V) *un juego balanceado. Tenemos que* $x \in C(N, V)$ *si y solo si* $(x, \mathcal{B}) \in C_{\mathcal{M}}(N, V)$ *para alguna* $\mathcal{B} \in \mathcal{M}(N)$.

Demostración
$\Rightarrow$) Sea $x \in C(N, V)$, es claro por proposición 1 y definición de core que $(x, \{N\}) \in C_{\mathcal{M}}(N, V)$.

$\Leftarrow$) Sea $(x, \mathcal{B}) \in C_{\mathcal{M}}(N, V)$. Tenemos que $x^S \in \partial V_S \ \forall S \in \mathcal{B}$ y $x^T \notin intV_T \ \forall T \notin \mathcal{B}$. Luego $x \in \partial V_{\mathcal{B}}$ y $x^T \notin intV_T \ \forall T \subset N$. Por tanto $x \in W_V$ y $x^T \notin intV_T \ \forall T \subset N$. Como el juego es balanceado $W_V = V_N$ luego $x \in V_N$ y $x^T \notin intV_T \ \forall T \subset N$. Así tenemos que $x \in C(N, V)$.■

O sea que si el juego es balanceado las asignaciones en el $\mathcal{M}$-Core son las mismas que están en el core.

Observe que si $(x, \mathcal{B}) \in C_{\mathcal{M}}(N, V)$ tenemos que $x^S \in \partial V_S$ para todo $S \in \mathcal{B}$, por tanto $x \in \partial V_{\mathcal{B}}$. Por otro lado $x^T \notin intV_T$ para todo $T \subset N$. Luego $x \notin intV_{\mathcal{B}'}$ para toda $\mathcal{B}' \in \mathcal{M}(N)$, pues de lo contrario si existe $\mathcal{B}' \in \mathcal{M}(N)$ tal que $x \in intV_{\mathcal{B}'}$ tendría que $x^T \in intV_T$ para todo $T \in \mathcal{B}'$ lo cual es una contradicción. Así tenemos que $x \in \partial V_{\mathcal{B}}$, $x \notin intV_{\mathcal{B}'}$ para toda $\mathcal{B}' \in \mathcal{M}(N)$. Luego $x \in \partial(\cup_{\mathcal{B} \in \mathcal{M}(N)} V_{\mathcal{B}}) = \partial W_V$. Lo que nos da el siguiente lema.

Lema 6 *Dado* (N, V), *si* $(x, \mathcal{B}) \in C_{\mathcal{M}}(N, V)$ *entonces* $x \in \partial W_V$.

3.2. El $\mathcal{TM}$-Core

Recordemos que nuestro concepto de $\mathcal{T}$-core surgió a partir de eliminar del core las asignaciones que están débilmente dominadas por otro elemento del core, lo cual es razonable si hemos aceptado el concepto de core. Este mismo razonamiento lo usaremos en relación al $\mathcal{M}$-Core. Si aceptamos el concepto de $\mathcal{M}$-Core introducido por Cesco (2008) en los TU y su equivalente, presentado en este trabajo, para los NTU; creemos conveniente preguntarnos en nuestro contexto (NTU) si existen asignaciones en el $\mathcal{M}$-Core que estén débilmente dominadas por otros elementos del $\mathcal{M}$-Core. A partir de este refinamiento surge el $\mathcal{TM}$-Core. Diremos que una $\mathcal{M}$-pre imputación $(x, \mathcal{B})$ esta débilmente dominada por otra $(y, \mathcal{B}')$ si $y > x$.

Definición 10 *El $\mathcal{TM}$-core de (N, V) esta definido por los elemetos del $\mathcal{M}$-core que no están débilmete dominados por ningún otro elemento del $\mathcal{M}$-core. Lo denotaremos por $C_{\mathcal{TM}}(N, V)$.*

$$C_{\mathcal{TM}}(N, V) = \{(x, \mathcal{B}) \in C_{\mathcal{M}}(N, V) : \nexists (y, \mathcal{B}') \in C_{\mathcal{M}}(N, V) \text{ tal que } y > x\}$$

Proposición 2 *Un elemento $(x, \mathcal{B})$ del $C_{\mathcal{M}}(N, V)$ esta en el $C_{\mathcal{TM}}(N, V)$ si solo si no existe $y \in W_V$ tal que $y > x$. Esto es,*

$$C_{\mathcal{TM}}(N, V) = \{(x, \mathcal{B}) \in C_{\mathcal{M}}(N, V) : \nexists y \in W_V \text{ con } y > x\}$$

Demostración

Sea $(x, \mathcal{B}) \in C_{\mathcal{TM}}(N, V)$, supongamos que existe $y \in W_V$ tal que $y > x$. Sea $\mathcal{B}'$ tal que $y \in V_{\mathcal{B}'}$. Luego como $y > x$ y $(x, \mathcal{B}) \in C_{\mathcal{TM}}(N, V)$, tenemos que $(y, \mathcal{B}') \in C_{\mathcal{TM}}(N, V)$,. Lo cual es un absurdo pues $(x, \mathcal{B}) \in C_{\mathcal{TM}}(N, V)$ y $y > x$.

La otra inclusión sale de inmediato por lema 6.$\blacksquare$

Lema 7 *El $\mathcal{TM}$-core es no vacío si y solo si el $\mathcal{M}$-core es no vacío.*

La prueba de esto por lema 4 es equivalente a la dada en el lema 1.

Del lema anterior y del teorema 4 se deduce el siguiente resultado.

Teorema 5 *El $\mathcal{TM}$-core es no vacío para todo juego NTU.*

Veamos ahora algunas relaciones interesantes entre $\mathcal{T}$-core y el $\mathcal{TM}$-core.

Lema 8 *Sea (N, V) casi no nivelado. Si $x \in C_{\mathcal{T}}(N, V)$ entonces $(x, \{N\}) \in C_{\mathcal{TM}}(N, V)$.*

Demostración

Del hecho que $C_{\mathcal{T}} \subset C$ y del lema 5 tenemos que si $x \in C_{\mathcal{T}}(N, V)$, entonces $(x, \{N\}) \in C_{\mathcal{M}}(N, V)$. Por otro lado, si existe $y \in W_V$ tal que $y > x$, sea $\mathcal{B}'$ tal que $y \in V_{\mathcal{B}'}$; sea i tal que $y^i > x^i$, sea $T \in \mathcal{B}'$ tal que $i \in T$. Tenemos dos casos:

a) si $T = N$ osea $\mathcal{B}' = \{N\}$, lo que implica que $y \in V_N$ que es un absurdo pues $x \in C_{\mathcal{T}}(N, V)$.

b) si $T \subsetneqq N$ como $y^T \in V_T$; $y^T > x^T$ y V_T es no nivelado tenemos que $x^T \in int\ V_T$, lo cual es una contradicción pues $x \in C_{\mathcal{T}}(N, V)$.

Por tanto no existe $y \in W_V$ tal que $y > x$. Lo que implica , junto con lo hecho antertiormente que $(x, \{N\}) \in C_{\mathcal{TM}}(N, V)$.$\blacksquare$

Lema 9 *Sea (N, V) balanceado. Tenemos que $x \in C_{\mathcal{T}}(N, V)$ si y solo si $(x, \mathcal{B}) \in C_{\mathcal{TM}}(N, V)$ para alguna $\mathcal{B} \in \mathcal{M}(N)$.*

Demostración

$\Rightarrow$) Sea $x \in C_{\mathcal{T}}(N,V)$, como $C_{\mathcal{T}} \subset C$ por lema 5 tenemos que $(x,\{N\}) \in C_{\mathcal{M}}(N,V)$ y como $W_V = V_N$ (pues el juego es balanceado) $\nexists y \in W_V$ tal que $y > x$. Por tanto $(x,\{N\}) \in C_{\mathcal{MT}}(N,V)$

$\Leftarrow$) Sea $(x,\mathcal{B}) \in C_{\mathcal{TM}}(N,V)$. Por proposición 2 tenemos que $(x,\mathcal{B}) \in C_{\mathcal{M}}(N,V)$ y $\nexists y \in W_V$ tal que $y > x$. Luego por lema 5 y el hecho de que $W_V = V_N$ tenemos que $x \in C(N,V)$ y $\nexists y \in V_N$ tal que $y > x$. Por tanto $x \in C_{\mathcal{T}}(N,V)$.■

O sea que si el juego es balanceado las asignaciones en el $\mathcal{TM}$-Core son las mismas que están en el $\mathcal{T}$ core.

Antes de pasar al parágrafo siguiente observemos algunas relaciones importantes entre los conceptos solución trabajados hasta aquí. Miremos los elementos del $\mathcal{M}$-Core y el $\mathcal{TM}$-Core, solo como las asignaciones (del par $(x,\mathcal{B})$ consideremos solo x). Con esta aclaración tenemos que:

1)$C_{\mathcal{T}}(N,V) \subset C(N,V) \subset C_{\mathcal{M}}(N,V)$ para todo (N,V).
2)$C_{\mathcal{T}}(N,V) \subset C_{\mathcal{TM}}(N,V) \subset C_{\mathcal{M}}(N,V)$ para todo (N,V) casi no nivelado.
3)$C_{\mathcal{T}}(N,V) = C(N,V) \subset C_{\mathcal{TM}}(N,V)$ para todo (N,V) no nivelado.
4)$C_{\mathcal{T}}(N,V) = C_{\mathcal{TM}}(N,V) \subset C(N,V) = C_{\mathcal{M}}(N,V)$ para todo (N,V) balanceado.
5)$C_{\mathcal{T}}(N,V) = C(N,V) = C_{\mathcal{TM}}(N,V) = C_{\mathcal{M}}(N,V)$ para todo (N,V) no nivelado y balanceado.

Hemos mencionado que los juegos con utilidades transferibles TU, se pueden mirar con un juego NTU; explicaremos un poco más esto.

Un juego TU es un par (N,v) donde N es el conjunto de jugadores y v una función que asigna a cada subconjunto $S \subset N$ un numero real $v(S)$ que se interpreta como el pago que puede obtener, si se forma, la coalición S. En este contexto también se define el core de forma similar a los NTU. Estos juegos se pueden ver como caso particular de los NTU asociando al juego (N,v) el juego (N,V) donde $V_S = \{x^S \in \mathbf{R}^S : \sum_{i \in s} x_i \leq v(S)\}$, y el core definido en un contexto o en otro es el mismo. Ahora con esto en mente y con abuso de notación escribiremos TU $\subset$ NTU. Pero los TU son siempre no nivelados y la condición de balance es equivalente a que el core sea no vacío (Teorema de Bondareva-Shapley). Por tanto la observación 5) hecha anteriormente nos da el siguiente resultado.

Corolario 2 *Los conceptos de $\mathcal{T}$-core, core,$\mathcal{TM}$-core y $\mathcal{M}$-core coinciden para todo juego TU con core no vacío.*

Se puede ver fácilmente que si miramos los TU el concepto de $\mathcal{TM}$-core y $\mathcal{M}$-core coinciden; además estos conceptos son equivalentes al concepto de $\mathcal{M}$-core introducido por Cesco 2008 para los juegos TU.

3.3. Una axiomatización del $\mathcal{TM}$-Core

El objetivo de esta sección es obtener una caracterización del $\mathcal{TM}$-Core con los axiomas usados para caracterizar el core (con las adecuaciones correspondientes al nuevo concepto) y un axioma adicional.

Recordemos que $\Gamma_{\mathcal{U}}$ es la clase de todos los juegos (N,V) tales que $N \subset \mathcal{U}$ y que $\Gamma^{\mathcal{CC}} \subset \Gamma_{\mathcal{U}}$ la clase de todos lo juegos casi no nivelados con core no vacío incluidos en $\Gamma_{\mathcal{U}}$. Notaremos por Γ^* la clase de todos lo juegos casi no nivelados incluidos en $\Gamma_{\mathcal{U}}$. Sea $\Gamma \subset \Gamma_{\mathcal{U}}$ un subconjunto cualquiera de Γ. Notar que $\Gamma^{\mathcal{CC}} \subsetneqq \Gamma^* \subset \Gamma_{\mathcal{U}}$.

Una solución σ sobre Γ es una función que a cada $(N,V) \in \Gamma$ le asigna un subconjunto $\sigma(N,V) \subset X^*_{\mathcal{M}}(N,V)$,donde $X^*_{\mathcal{M}}(N,V) = \{(x,\mathcal{B}) \in \mathbf{R}^N \times \mathcal{M}(N) : x^S \in V_S \text{ para todo } S \in \mathcal{B}\}$ es el conjunto de factibles pagos para el juego (N,V).

Recordemos ahora algunos axiomas:

Una solución σ es no vacía (NE) sobre Γ si $\sigma(N,V) \neq \varnothing$ para cada $(N,V) \in \Gamma$.

Una solución σes optima de Pareto (PO) sobre Γ si $(x, \mathcal{B}) \in \sigma(N, V)$, entonces$(x, \mathcal{B}) \in A_{\mathcal{M}}$, para cada $(N, V) \in \Gamma$. Además decimos que una solución σes optima de Pareto fuerte (SPO) sobre Γ si $(x, \mathcal{B}) \in \sigma(N, V)$, entonces no existe $y \in W_V$ tal que $y > x$, para cada $(N, V) \in \Gamma$ (notar que $(SPO) \Rightarrow (PO)$).

Una solución σ es racional individualmente (IR) sobre Γ si $(x, \mathcal{B}) \in \sigma(N, V)$, entonces $x^{\{i\}} \notin intV_{\{i\}}$ para todo $i \in N$,para cada $(N, V) \in \Gamma$.

Una solución σsatisface el axioma de *igual oportunidad* (EO) sobre Γ si $(x, \mathcal{B}) \in \sigma(N, V)$ y $(x, \mathcal{B}') \in A_{\mathcal{M}}$ implica que $(x, \mathcal{B}') \in \sigma(N, V)$,para cada $(N, V) \in \Gamma$. Este axioma es introducido por Cesco 2008 (para caracterizar el $\mathcal{M}$-core en los TU games) quiere resaltar el hecho de que no es determinante como se agrupan los jugadores para conseguir una asignación si ésta es (PO).

Una solución σ es *independiente de alternativa irrelevante debil* (WIAI) sobre Γ si dado $(N, V) \in \Gamma$ y $(N, V^*) \in \Gamma$ con $V_S^* \subset V_S$ para todo $S \subset N$ y sea $(x, \mathcal{B}) \in \sigma(N, V)$ y $(x, \mathcal{B}) \in X^*_{\mathcal{M}}(N, V^*)$ entonces $(x, \mathcal{B}) \in \sigma(N, V^*)$. Este axioma resalta el hecho que si tengo un juego "más chico"que otro y en el más grande elijo algo que tengo disponible en el más chico también lo debo elegir en el más chico.

Vayamos ahora al concepto de juego reducido.

Definición 11 *Sea $(N, V) \in \Gamma$; $(x, \mathcal{B}) \in X^*(N, V)$ y sea $\varnothing \neq S \subset N$.* ***El juego $M-$reducido con respecto a** S **y** (x, B)* *es el juego $(S, V^{\mathcal{M}}_{S,x})$definido por:*

$$V^{\mathcal{M}}_{S,x}(S) = \{y^S \in \mathbf{R}^S : (y^S, x^{N\setminus S}) \in W_V\}$$
$$V^{\mathcal{M}}_{S,x}(T) = \cup_{Q \subset N\setminus S}\{y^T \in \mathbf{R}^T : (y^T, x^Q) \in V_{T\cup Q}\}$$

Notar que si el juego es balanceado esta definición de juego reducido coincide con la dada en Peleg 1985. Además el juego $\mathcal{M}-$reducido de (N, V) coincide con el juego reducido (clásico) de (N, V^B), el cubrimiento balanceado de (N, V). Por tanto el juego $\mathcal{M}-$reducido de (N, V) es un juego NTU.

Definición 12 *Una solución σsobre Γ tiene la propiedad del juego reducido (RGP) si satisface lo siguiente: si $(N, V) \in \Gamma, (x, \mathcal{B}) \in \sigma(N, V)$ y sea $\varnothing \neq S \subset N$, entonces $(S, V^{\mathcal{M}}_{S,x}) \in \Gamma$ y $(x^S, \mathcal{B}_S) \in \sigma(S, V^{\mathcal{M}}_{S,x})$ para algún $\mathcal{B}_S \in M(S)$.*

Teorema 6 *El $\mathcal{TM}$-Core satisface NE, IR, EO, WIAI y RGP sobre Γ^*.*

Demostración

NE) Esta probada en teorema 5 ;

IR) Sale del hecho de que si $(x, \mathcal{B}) \in C_{\mathcal{TM}}(N, V)$, entonces $x^{\{i\}} \notin intV_{\{i\}}$ para todo $i \in N$.

EO) Sea $(N, V) \in \Gamma^*$, $(x, \mathcal{B}) \in C_{\mathcal{TM}}(N, V)$ y sea $(x, \mathcal{B}') \in A_{\mathcal{M}}$. Luego para toda $S \subset N$ (por proposición 1); no existe $y \in W_V$ tal que $y > x$ y $(x, \mathcal{B}') \in A_{\mathcal{M}}$. Por tanto $(x, \mathcal{B}') \in C_{\mathcal{TM}}(N, V)$.

WIAI) Sea $(N, V) \in \Gamma^*$ y $(N, V^*) \in \Gamma^*$ con $V_S^* \subset V_S$ para todo $S \subset N$ y sea $(x, \mathcal{B}) \in C_{\mathcal{TM}}(N, V)$ y $(x, \mathcal{B}) \in X^*_{\mathcal{M}}(N, V^*)$. Luego $x^S \notin intV_S$ $\forall S \subset N$; no existe $y \in W_V$ tal que $y > x$ y $(x, \mathcal{B}) \in X^*_{\mathcal{M}}(N, V^*)$. Como $V_S^* \subset V_S$ para todo $S \subset N$, entonces $x^S \notin intV_S^*$ para todo $S \subset N$; no existe $y \in W_{V^*}$ tal que $y > x$ (ya que $W_{V^*} \subset W_V$) y que $(x, \mathcal{B}) \in A_{\mathcal{M}}(N, V^*)$. Por tanto $(x, \mathcal{B}) \in C_{\mathcal{TM}}(N, V^*)$.

RGP) Sea $(N, V) \in \Gamma^*$ y sea $(x, \mathcal{B}) \in C_{\mathcal{TM}}(N, V)$. y sea $\varnothing \neq S \subset N$. Consideremos el juego $\mathcal{M}-$reducido $(S, V^{\mathcal{M}}_{S,x})$. Por Peleg 1985 $(S, V^{\mathcal{M}}_{S,x})$ es NTU bien definido. Además $x \in C_{\mathcal{T}}(N, V^B)$ y como $V^{\mathcal{M}}_{S,x} = V^B_{S,x}$ (donde $V^B_{S,x}$ denota el juego reducido clásico de (N, V^B) respecto de x y S), por lo hecho en el $\mathcal{T}$-core tenemos que $(S, V^{\mathcal{M}}_{S,x})$ es casi no nivelado. Luego $(S, V^{\mathcal{M}}_{S,x}) \in \Gamma^*$.

Por otro lado $(x, \mathcal{B}) \in C_{\mathcal{TM}}(N, V)$, implica que $x \in W_V$, luego $x^S \in V^{\mathcal{M}}_{S,x}(S)$. Si existe $y^S > x^S$ tal que $y^S \in V^{\mathcal{M}}_{S,x}(S)$, entonces $(y^S, x^{N\setminus S}) \in W_V$, pero $(y^S, x^{N\setminus S}) > x$, lo cual es un absurdo porque $(x, \mathcal{B}) \in C_{\mathcal{TM}}(N, V)$. Luego $x^S \in \partial V^{\mathcal{M}}_{S,x}(S)$.

Ahora si existe $T \subsetneqq S$ tal que $x^T \in intV^{\mathcal{M}}_{S,x}(T)$. Tenemos que existe $y^T >> x^T$ tal que $(y^T, x^Q) \in V_{T\cup Q}$ para algún $Q \subset N \setminus S$. Luego como $V_{T\cup Q}$ es no nivelado y comprensivo $(x^T, x^Q) \in intV_{T\cup Q}$ lo que es un absurdo porque $(x, \mathcal{B}) \in C_{\mathcal{TM}}(N, V)$. Por tanto $x^T \notin intV^{\mathcal{M}}_{S,x}(T)$ para todo $T \subsetneqq S$.

Así $(x^S, \{S\}) \in C_{\mathcal{M}}(S, V^{\mathcal{M}}_{S,x})$. Por ultimo supongamos que exsite $y^S > x^S$ tal que $y^S \in W_{V^{\mathcal{M}}_{S,x}}$. Luego exsite $\mathcal{B}_S \in$M(S) tal que $y^T \in \partial V^{\mathcal{M}}_{S,x}(T)$ para todo $T \in \mathcal{B}_S$, tenemos dos casos:

i) si $\mathcal{B}_S = \{S\}$, lo que implica que existe y tal que $y^S > x^S$ donde $y^S \in V^{\mathcal{M}}_{S,x}(S)$, que ya vimos que nos lleva a una contradicción

ii) si $\mathcal{B}_S \neq \{S\}$, el hecho de que $y^T \in \partial V^{\mathcal{M}}_{S,x}(T)$ para todo $T \in \mathcal{B}_S$, implica que para cada $T \in \mathcal{B}_S$, existe $Q \subset N \setminus S$ (Q depende de T) tal que $(y^T, x^Q) \in V_{T\cup Q}$. Ahora sea i tal que $y^i > x^i$ y sea $T \in \mathcal{B}_S$ tal que $i \in T$. Tenemos que $(y^T, x^Q) \in V_{T\cup Q}$ y que $(y^T, x^Q) > (x^T, x^Q)$, como $V_{T\cup Q}$ es no nivelado y comprensivo $(x^T, x^Q) \in intV_{T\cup Q}$ lo que es un absurdo porque $(x, \mathcal{B}) \in C_{\mathcal{TM}}(N, V)$.

Por lo que hemos probado que no existe $y^S > x^S$ tal que $y^S \in W_{V^{\mathcal{M}}_{S,x}}$. Lo que termina la prueba de que $(x^S, \{S\}) \in C_{\mathcal{TM}}(S, V^{\mathcal{M}}_{S,x})$.■

Lema 10 *Si una solución σsobre Γ satisface IR y RGP, entonces σes SPO*

Demostración

Sea $(N, V) \in \Gamma$, $(x, \mathcal{B}) \in \sigma(N, V)$. Supongamos que existe $y \in W_V$ tal que $y > x$. Sea $i \in N$, tal que $y^i > x^i$ y sea $T = \{i\}$. Tenemos por RGP que $(x^T, \mathcal{B}') \in \sigma(N, V^{\mathcal{M}}_{T,x})$ para alguna $\mathcal{B}' \in \mathcal{M}(T)$. Como $(y^i, x^{N\setminus\{i\}}) \in W_V$ (por ser W_V comprensivo) tenemos que $y^{\{i\}} \in V_{\mathcal{M}T,x}(\{i\})$. Luego $x^{\{i\}} \in intV^{\mathcal{M}}_{T,x}(\{i\})$, lo cual es un absurdo por que σ satisface IR. Por tanto no existe $y \in W_V$ tal que $y > x$, lo que prueba que σ satisface SPO.■

Observemos que $\mathcal{TM}$-Core satisface IR y RGP por tanto es SPO

Lema 11 *Si una solución σsobre Γ satisface IR y RGP, entonces $\sigma(N, V) \subset C_{\mathcal{TM}}(N, V)$ para todo $(N, V) \in \Gamma$*

Demostración

Sea $(N, V) \in \Gamma$.Veamos primero que $\sigma(N, V) \subset C_{\mathcal{M}}(N, V)$. Por ser σ SPO (lema anterior) tenemos que $\sigma(N, V) \subset A_{\mathcal{M}}(N, V)$. Supongamos que existe $(x, \mathcal{B}) \in \sigma(N, V)\setminus C_{\mathcal{M}}(N, V)$. Luego por proposición 1 existe $S \subset N$ tal que $x^S \in intV_S$. Consideremos dos casos:

i) si $S \neq N$. Sea $i \in S$ y $j \notin S$ sea $T = \{i, j\}$. Tenemos por RGP que $(x^T, \mathcal{B}') \in \sigma(N, V^{\mathcal{M}}_{T,x})$ para alguna $\mathcal{B}' \in \mathcal{M}(T)$. Pero $x^S \in intV_S = intV_{(S\setminus\{i\})\cup\{i\}}$ y como $S \setminus \{i\} \subset N \setminus T$, tenemos que $x^{\{i\}} \in intV^{\mathcal{M}}_{T,x}\{i\}$ lo cual es una contradicción, pues σ es IR.

ii) si $S = N$. Tenemos que $x \in intV_N$, luego $x \in intW_V$ lo cual es una contradicción, pues σ es SPO.

Lo anterior prueba que $\sigma(N, V) \subset C_{\mathcal{M}}(N, V)$ y como σ es SPO tenemos que $\sigma(N, V) \subset C_{\mathcal{TM}}(N, V)$, como queríamos.■

Corolario 3 *Si una solución σsobre Γ satisface NE, IR, EO y RGP, entonces $\sigma(N, V) = C_{\mathcal{TM}}(N, V)$ para todo $(N, V) \in \Gamma$ tal que $\mid \{x \in R^N : (x, \mathcal{B}) \in C_{\mathcal{M}}(N, V)\} \mid = 1$* [3]

Demostración

Sea $(N, V) \in \Gamma$. Por lema anterior tenemos que $\sigma(N, V) \subset C_{\mathcal{TM}}(N, V)$. Por otro lado sea $(x, \mathcal{B})$ un elemento de $C_{\mathcal{TM}}(N, V)$. Como σ satisface NE y el hecho que $\sigma(N, V) \subset C_{\mathcal{TM}}(N, V)$ tenemos que existe $\mathcal{B}' \in$M(N) tal que $(x, \mathcal{B}') \in \sigma(N, V)$. Luego como $(x, \mathcal{B}) \in A_{\mathcal{M}}(N, V)$ y σ satisface EO tenemos que $(x, \mathcal{B}) \in \sigma(N, V)$. Lo que termina la prueba de que $\sigma(N, V) = C_{\mathcal{TM}}(N, V)$.■

[3] Notaremos por $\mid A \mid$ al cardinal de un conjunto A.

Teorema 7 *Existe una única solución sobre Γ^* que satisface NE, IR,OE, WIAI y RGP y esta solución es el $\mathcal{TM}$-Core.*

Veamos antes de ir a la demostración del resultado un lema que necesitaremos.

Lema 12 *Sea $(N,V) \in \Gamma^*$, sea $l \in \mathcal{U}\backslash N$, sea $M = N \cup \{l\}$ y sea $(x,\mathcal{B}) \in C_{\mathcal{TM}}(N,V)$, entonces existe un juego $(M,Z) \in \Gamma^*$ tal que:*

$$| \{y \in R^M : (y,\mathcal{B}) \in C_{\mathcal{TM}}(M,Z)\} |= 1;$$

$$si\ z = (x^N, 0^{\{l\}}),\ (z,\{M\}) \in C_{\mathcal{TM}}(M,Z)$$

$$Z_{N,z}(S) = V^B(S)\ si \mid S \mid \neq 1\ y\ Z_{N,z}(\{i\}) = (-\infty, x^i]$$

Demostración (Lema)

Sea $M = N \cup \{l\}$ con $l \notin N$ definamos el juego(M,Z) de la siguiente manera:

si $S \subsetneq N$ y $\mid S \mid \neq 1$ defino $Z_S = V_S$

si $S = \{i\} \subset N$ defino $Z_S = (-\infty, x^i]$

si $S = N$ defino $Z_N = \{x \in \mathbf{R}^N : \sum_{i\in N} y_i \leq \sum_{i\in N} x_i\}$

si $S = \{l\}$ defino $Z_{\{l\}} = (-\infty, 0]$

si $S = T \cup \{l\}$ defino $Z_S = V_T^B \times 0^{\{l\}} + L_S$, donde L_S es la línea $\{ta^S : t \in R\}$, donde a^S esta definida por $a^{\{i\}} = -1$ si $i \neq l$ y $a^{\{l\}} = 1$.

Veamos que efectivamente $(M,Z) \in \Gamma^*$

Es claro que para todo $S \subset N$, Z_S cumple con las condiciones i) a iv) que se dan en la definición de un juego NTU y que además Z_S es no nivelado.

Sea ahora $S \subset M$ y $S = T \cup \{l\}$; es claro que $Z_S \neq \varnothing$ si $S \neq \varnothing$. Del hecho que V_T^B es cerrado y la definición de Z_S, se deduce fácilmente que Z_S es cerrado.

Veamos que Z_S es comprensivo, sea $h^S \geq y^S$ con $h^S \in Z_S$. Tenemos que existe $t \in \mathbf{R}$ tal que $h = (k^T - t\mathbf{1}^T, t^l)$ (con $\mathbf{1}^T$ denotaremos el vector de $\mathbf{R}^T$ cuyas componentes son todos uno) con $k^T \in V_T^B$. Sea u^T tal que $y^T = u^T - t1^T$ ($u^T = y^T + t\mathbf{1}^T$). Tenemos que $y = (u^T - t\mathbf{1}^T, y^l) = (u^T - (t-y^l)\mathbf{1}^T - y^l\mathbf{1}^T, y^l)$. El hecho que $h^T \geq y^T$, implica $k^T \geq u^T$ y como $h^l = t \geq y^l$, tenemos que $u^T \geq u^T - (t-y^l)\mathbf{1}^T$. Luego $k^T \geq u^T - (t-y^l)\mathbf{1}^T$. Por tanto $u^T - (t-y^l)\mathbf{1}^T \in V_T^B$ (pues $k^T \in V_T^B$ y V_T^B es comprensivo). Luego $y \in Z_S$, pues $y = (u^T - (t-y^l)\mathbf{1}^T - y^l\mathbf{1}^T, y^l)$.

Veamos ahora la propiedad iv) (esta propiedad esta demostrada en Peleg 1985 la prueba la tomamos de ahí). Sea $b^S \in \mathbf{R}^S$, sea $y^S \in (b^S + \mathbf{R}^S) \cap Z_S$. Entonces $y^S = (u^T, 0^l) + ta^S$ para $u^T \in V_T^B$ y $t \geq b^l$. El hecho de $u^i - t \geq b^i$, implica $u^i \geq b^i + t \geq b^i + b^l$ para todo $i \in T$. Sea $c^T \in \mathbf{R}^T$ definida por $c^i = b^i + b^l, i \in T$. Tenemos que $(c^T + \mathbf{R}^T) \cap V_T^B$ es acotado. Por tanto existe M tal que $\left\|u^T\right\| < M$ (pues $u^T \in (c^T + \mathbf{R}^T) \cap V_T^B$). Además si $i \in T$ $u^i \geq b^i + t \geq b^i + b^l$ luego $u^i - b^i \geq t \geq b^l$. Por tanto $\left\|u^T\right\| < M$ y $M - b^i \geq t \geq b^l$. Luego como $y^S = (u^T, 0^l) + ta^S$, existe H tal que $\left\|y^S\right\| < H$ por lo que $(b^S + \mathbf{R}^S) \cap Z_S$ es acotado. Hasta aquí hemos probado que (M,Z) es un juego NTU (bien definido).

Veamos que (M,Z) es casi no nivelado, (similar a lo hecho por Peleg). Sea $S \subsetneq M$. Si $S \subset N$ tenemos por definición que Z_S es no nivelado. Ahora si $S = T \cup \{l\}$,sea $y_1^S \in Z_S$, $y_2^S \in Z_S$. Supongamos que $y_1^S > y_2^S$. Probemos que $y_2^S \notin \partial Z_S$.

Para $k = 1,2$ sea $y_k^S = (u_k^T, 0^l) + t_k a^S$ para $u_k^T \in V_T^B$ y $t_k \in \mathbf{R}$. Es claro que $t_1 \geq t_2$. Si $t_1 = t_2$, entonces $u_1^T > u_2^T$. Luego como V_T^B es no nivelado existe $u_3^T >> u_2^T$ tal que $u_3^T \in V_T^B$. Si $z^S = (u_3^T, 0) + ta^S$ con $(t - t_2) > 0$, lo suficientemente chico, tenemos que $z^S >> y_2^S$ y que $z^S \in Z_S$. Ahora si $t_1 > t_2$, entonces sea t_3 tal que $t_1 > t_3 > t_2$. Luego $z^S = (u_1^T, 0) + t_3 a^S >> y_2^S$ y $z^S \in Z_S$. Lo que prueba que $y_2^S \notin \partial Z_S$ como queríamos.

Veamos ahora que cumple las condiciones dadas en el lema.

Veamos primero que $((x, 0^{\{l\}}), \{M\}) \in C_{\mathcal{TM}}(M,Z)$ y que $\mid \{y \in R^M : (y,\mathcal{B}) \in C_{\mathcal{TM}}(M,Z)\} \mid = 1$

Probaremos primero que $(x^N, 0^{\{l\}}) \in C_{\mathcal{T}}(M,Z)$.

Sea $z = (x^N, 0^{\{l\}})$. Observe que $z \in Z_M$ pues $x^N \in V_N^B$. Ahora supongamos que existe $S \subset M$ tal que $z^S \in intZ_S$. Por la definición de Z_S y el hecho de que $x \in C_{\mathcal{MT}}(N, V)$ es claro que $\mid S \mid\neq 1$ y que $S \subsetneqq N$. Por tanto $z^S \in intZ_S$ con $S = T \cup \{l\}$. Luego existe $y \in Z_S$ tal que $y^S >> z^S$. Como $y^T = h^T - t\mathbf{1}^T$ con $h^N \in V_N^B$ y $t = y^{\{t\}} > 0$. Por tanto $y^T \in intV_N^B$ lo cual es una contradicción ya que $y^T >> x^T$ y $x^T \notin intV_T^B$). Por otro lado si existe $y \in Z_M$ tal que $y > z$. Luego $y^{\{l\}} \geqslant z^{\{l\}} = 0$ y si $y^{\{l\}} > 0$ por definición de Z_M tenemos que $y^N = h^N - t\mathbf{1}^N$ con $h^N \in V_N^B$ y $t > 0$. Por tanto $y^N \in intV_N^B$ lo cual es una contradicción (pues $y^N > z^N$ y $z^N \in \partial V_N^B$). Entonces $y^{\{l\}} = 0$. Como $y^{\{l\}} = 0 = z^{\{l\}}$, tenemos que $y^N \in V_N^B$ y que $y^N > x$, lo cual es una contradicción pues $x \in C_{\mathcal{MT}}(N, V)$. Por tanto $(x^N, 0^{\{l\}}) \in C_{\mathcal{T}}(M, Z)$ esto más teorema 8 nos da que $((x^N, 0^{\{l\}}), \{M\}) \in C_{\mathcal{TM}}(M, Z)$.

Por otro lado si$(y, \mathcal{B}) \in C_{\mathcal{TM}}(M, Z)$, como $C_{\mathcal{TM}}$ es IR, $y^i \notin int(-\infty, x^i]$ para todo $i \in N$ y además $y^l \notin int(-\infty, 0]$. Luego $y \geq (x^N, 0^{\{l\}})$ y como $((x^N, 0^{\{l\}}), \{M\}) \in C_{\mathcal{TM}}(M, Z)$, tenemos que $y = (x^N, 0^{\{l\}})$, de lo contrario y domina débilmente a x lo cual sería una contradicción.

Por tanto hemos probado que $\mid \{y \in R^M : (y, \mathcal{B}) \in C_{\mathcal{TM}}(M, Z)\} \mid= 1$ y que $((x^N, 0^{\{l\}}), \{M\}) \in C_{\mathcal{TM}}(M, Z)$

Veamos por último que $Z_{N,z}(S) = V^B(S)$ si $\mid S \mid\neq 1$ y $Z_{N,z}(\{i\}) = (-\infty, x^i]$.

i) $Z_{N,z}(N) = \{y^N : (y^N, 0^l) \in Z_M\} = V_N^B$ (por definición de Z_M);

ii) si $S \subsetneq N$ y

a) si $\mid S \mid\neq 1$

$Z_{N,z}(S) = \cup_{Q \subset M \setminus N}\{y^S \in \mathbf{R}^S : (y^S, z^Q) \in Z_{S \cup Q}\} =$

$\{y^S \in \mathbf{R}^S : (y^S, 0^l) \in Z_{S \cup \{l\}}\} \cup \{y^S \in \mathbf{R}^S : y^S \in Z_S\} = V_S$

la última igualdad es por definición de $Z_{S \cup \{l\}}$ y de Z_S.

b) si $S = \{i\} \subset N$

$Z_{N,z}(\{i\}) = \cup_{Q \subset M \setminus N}\{y^{\{i\}} \in \mathbf{R}^{\{i\}} : (y^{\{i\}}, z^Q) \in Z_{S \cup Q}\} =$

$\{y^{\{i\}} \in \mathbf{R}^{\{i\}} : (y^{\{i\}}, 0^l) \in Z_{\{i\} \cup \{l\}}\} \cup \{y^{\{i\}} \in \mathbf{R}^{\{i\}} : y^{\{i\}}, \in Z_{\{i\}}\} =$

$V_{\{i\}} \cup (-\infty, x^i] = (-\infty, x^i]$

la última igualdad es consecuencia de que $x^i \notin intV_{\{i\}}$ y como $V_{\{i\}}$ es comprensivo tenemos que $V_{\{i\}} \subset (-\infty, x^i]$.

Con lo que la prueba del lema queda completa.■

Demostración (Teorema)

Por lo hecho en teorema 3 tenemos que $\mathcal{TM}$-Core satisface todos los axiomas. Para ver que es la única solución que los satisface necesitamos ver que si σ es otra solución que los satisface $\sigma(N, V) = C_{\mathcal{M}}(N, V)$ para todo $(N, V) \in \Gamma^*$. Sea σ una solución que satisface los axiomas por lema 11 tenemos que $\sigma(N, V) \subset C_{\mathcal{TM}}(N, V)$ para todo $(N, V) \in \Gamma^*$. Veamos ahora la otra inclusión.

Sea $(x, \mathcal{B}) \in C_{\mathcal{M}}(N, V)$. Sea $(M, Z) \in \Gamma^*$ el juego construido en el lema anterior y $z = (x, 0^{\{l\}})$. Por lema 3 $(z, \{M\}) \in \sigma(M, Z)$. Luego por RGP existe $\mathcal{B}' \in$M(N) tal que $(x, \mathcal{B}') \in \sigma(N, Z_{N,z}^{\mathcal{M}})$.

Por otro lado $Z_{N,z}(N) \subset Z_{N,z}^{\mathcal{M}}(N)$ (por que $Z_M \subset W_Z$) y $Z_{N,z}(S) = Z_{N,z}^{\mathcal{M}}(S)$ para todo $S \subsetneq N$(por definición de juego reducido y juego $\mathcal{M}$-reducido). Además $V^B(S) = Z_{N,z}(S)$ si $\mid S \mid\neq 1$ y $V^B(\{i\}) \subset Z_{N,z}(\{i\})$ para todo $i \in N$. Por tanto $V^B(S) \subset Z_{N,z}^{\mathcal{M}}(S)$ para todo $S \subset N$. De donde tenemos la siguiente afirmación:

$$V(S) \subset Z_{N,z}^{\mathcal{M}}(S) \text{ para todo } S \subset N.$$

Por tanto $(x, \mathcal{B}) \in A_{\mathcal{M}}(N, V)$ implica que $x^S \in Z_{N,z}^{\mathcal{M}}(S)$ para todo $S \in \mathcal{B}$. Además como $(z, \{M\}) \in C_{\mathcal{TM}}(M, Z)$ por lo hecho en la prueba que el $\mathcal{TM}$-Core satisface RGP tenemos que $(x, \{N\}) \in C_{\mathcal{TM}}(N, Z_{N,z}^{\mathcal{M}})$, por tanto $x^S \notin intZ_{N,z}^{\mathcal{M}}(S)$ para todo $S \subset N$. Así $(x, \mathcal{B}) \in A_{\mathcal{M}}(N, Z_{N,z}^{\mathcal{M}})$.

Luego tenemos que $(x,\mathcal{B}') \in \sigma(N, Z^{\mathcal{M}}_{N,z})$ y que $(x,\mathcal{B}) \in A_{\mathcal{M}}(N, Z^{\mathcal{M}}_{N,z})$. Entonces por (EO) tenemos que $(x,\mathcal{B}) \in \sigma(N, Z^{\mathcal{M}}_{N,z})$.

Ahora tenemos que $(x,\mathcal{B}) \in A_{\mathcal{M}}(N,V)$ y $(x,\mathcal{B}) \in \sigma(N, Z^{\mathcal{M}}_{N,z})$ y que $V(S) \subset Z^{\mathcal{M}}_{N,z}(S)$ para todo $S \subset N$. Como σ satisface (WIAI) tenemos que $(x,\mathcal{B}) \in \sigma(N,V)$. Con lo que se termina la prueba.■

3.4. Borrando OE y fortaleciendo WIAI

Es este apartado daremos una axiomatización de $\mathcal{TM}$-Core con un axioma un poco más fuerte de IAI que llamaremos IAI (independencia de alternativa irrelevante y borraremos el axioma de OE (o más bien lo incluiremos en IAI)

Decimos que una solución σes *independiente de alternativa irrelevante* (IAI) sobre Γsi dado $(N,V) \in \Gamma$ y $(N,V^*) \in \Gamma$ con $V^*_S \subset V_S$ para todo $S \subset N$ y siendo $(x,\mathcal{B}) \in \sigma(N,V)$ y $(x,\mathcal{B}') \in X^*_{\mathcal{M}}(N,V^*)$ entonces $(x,\mathcal{B}') \in \sigma(N,V^*)$.

Lema 13 *El $\mathcal{TM}$-Core satisface IAI.*

Demostración

La prueba es similar a la que se hace para probar que el $\mathcal{TM}$-Core satisface WIAI.■

Observemos que si una solución σ satisface IAI, entonces la solución satisface EO y WIAI (para ver EO basta tomar $V^* = V$ y $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$). Por otro lado si satisface IR, RGP, EO y WIAI veamos que σ satisface IR, RGP, IAI.

Sean $(x,\mathcal{B}) \in \sigma(N,V)$ y (N,V^*) tal que $V^*_S \subset V_S$ para todo $S \subset N$ con . Tenemos que:

i)$(x,\mathcal{B}) \in \sigma(N,V)$

ii)$(x,\mathcal{B}') \in X^*_{\mathcal{M}}(N,V^*)$, implica que $x^S \in V^*_S$ para todo $S \in \mathcal{B}'$. Luego $x^S \in V_S$ para todo $S \in \mathcal{B}'$. Si existe $S \in \mathcal{B}'$ tal que $x^S \in intV_S$,tenemos un absurdo porque $(x,\mathcal{B}) \in C_{\mathcal{TM}}(N,V)$ (ya que por ser σ IR y RGP ya hemos visto que $\sigma \subset C_{\mathcal{TM}}$. Por tanto $x^S \in \partial V_S$ para todo $S \in \mathcal{B}'$. Luego $(x,\mathcal{B}') \in A_{\mathcal{M}}(N,V)$ Ahora por i) y la conclusión sacada en ii) más el hecho de que σ satisface (EO) tenemos que $(x,\mathcal{B}') \in \sigma(N,V)$. Luego por WIAI tenemos que $(x,\mathcal{B}') \in \sigma(N,V^*)$ (ya que $(x,\mathcal{B}') \in X^*_{\mathcal{M}}(N,V^*)$). Por tanto bajo el supuesto de IR y RGP vale que EO y WIAI es equivalente a IAI. De donde se desprende es siguinete resultado.

Teorema 8 *Existe una única solución sobre Γ^* que satisface NE, IR,IAI y RGP y esta solución es el $\mathcal{TM}$-Core.*

4. Conclusión

Hemos visto en el trabajo un interesante concepto solución tipo core que es siempre no vacío para los juegos NTU, con una caracterización axiomática con cuatro axiomas clásicos. Este concepto tiene interesantes relaciones con el core clásico y lo incluye en los juegos para los que el core está caracterizado. Se ha logrado un control total (final de la sección 3.2) de cuáles son la relaciones del nuevo concepto en relación al core, cuando este último es no vacío. No se ha podido conseguir una extensión del core clásico en los NTU como en Cesco (2008) en los TU, en el sentido que los conceptos coincidan si el core es no vacío; pero esto es bastante común cuando se extiende resultados desde los TU a los NTU. De hecho, la caracterización del core que se da en los TU sólo se logra en los NTU en una clase más reducida; la condición de balance que los TU es equivalente a core es no vacío en los NTU es solo suficiente para que el core sea no vacío.

Nos interesaría ver en un futuro trabajo como este nuevo concepto solución puede ser visto en los juegos hedónicos y en otros juegos donde se han presentados soluciones que en algún sentido son equivalentes al core de algún juego NTU.

Referencias

[1] Aumann, R. (1961): *"The Core of a Cooperative Game without Side Payments"*, Transactions of the American Mathematical Society 98 , 539-552.

[2] Peleg, B. (1985): *"An Axiomatization of the Core of Cooperative Games without Side Payments"*, Journal of Mathematical Economics, 14, 203 – 214.

[3] Cesco J. (2008): *"The M-Core: Definiton and Axiomatic Characterization"*. Working paper.

[4] Scarf, H. (1967): "The Core of an N Person Game", *Econometrica* Vol. 35; No. 1, 50-69.

[5] Shapley, L. (1967): *"On Balanced Sets and Cores"*, Naval Research Logistics Quarterly 14, 453-460.