

---

## **“Las cuatro reglas de Marshall de la demanda derivada: un análisis del desarrollo metodológico”<sup>1</sup>**

**Lic. Andrés David MICHEL RIVERO**  
**UNRC-Maestría en Economía UNT 2005**  
[Kevinandres2002@yahoo.com.ar](mailto:Kevinandres2002@yahoo.com.ar)

**Versión preliminar**

### **Resumen**

Siguiendo un orden cronológico se muestra el fortalecimiento de las 4 reglas de Marshall de la demanda derivada. Desde su difusión de manera literal, intuitiva y poco formalizada, devino un análisis de su fortaleza metodológica que viene dada por su consistencia con la conducta optimizadora de la firma. Siendo esto afirmativo, el relajamiento de supuestos como, competencia perfecta, adición de más insumos y cambio tecnológico, no modifican la naturaleza de las reglas. Hicks aporta una paradoja al problema, pero se salva agregando mas estructura. El tema es útil para entender situaciones de poder sindical y encarar múltiples estudios empíricos en el área.

**Códigos JEL:** [B4], [B0] [J5]

### **Abstract**

This work presents chronologically the four derived demand Marshall's rules. It shows that since its literal, intuitive and no much formal spreading, a methodological strength process analysis came through. This force was given on account of its consistency with the firm's optimal behaviour. In this way relaxing assumptions like the ones of perfect competitive, adding more goods to this issue and technological changes, don't alter the nature of these rules. A paradox appears with Hicks which is solved by adding more structure. This topic is useful to understand labour union power situations and also to set up multiple empirical studies in the area.

**Códigos JEL:** [B4], [B0] [J5]

---

<sup>1</sup> Agradezco los comentarios vertidos por el Dr. Víctor Jorge Elías, a quien este trabajo reconoce como disparador inicial. Al mismo tiempo fueron importantes las sugerencias realizadas por el Dr. Luis Manuel Cordoní, de la profesora Marta Mirabella y el Lic. Ernesto Bosch. Por último, agradezco las disquisiciones de la Lic. Gisela de Lafuente y del Lic. Marcos Herrera Gómez.

---

---

## **“Las cuatro reglas de Marshall de la demanda derivada: un análisis del desarrollo metodológico”**

### **I- Introducción**

La escuela Clásica, y básicamente Smith, Ricardo, Malthus, Mill y en parte Jevons, se alineaban detrás de la teoría del *fondo de los salarios* para explicar las leyes que regían el nivel de dicha variable de la economía. Dicha teoría era adecuada en un contexto donde la agricultura participaba en gran dimensión en la producción total de la economía. El nivel de salario se decía dependía directamente del tamaño del fondo con el cual contaban los terratenientes para afrontar la nueva campaña agrícola, y en forma inversa de la cantidad de empleados del mercado laboral<sup>2</sup>.

Siguiendo dicha teoría, la demanda por trabajo dependía pura y exclusivamente de las variables mencionadas, lo cual trajo aparejado críticas por lo incompleta de la misma. Una de las críticas que podemos achacarle a la distancia, es la no dependencia de los demás insumos que serán combinados junto con el trabajo para la obtención del producto, como así tampoco, no existen elementos para relacionar la demanda de trabajo con la demanda del producto final al que contribuye con su participación<sup>3</sup>.

Marshall nos muestra en “*los principios*” una forma de presentar la demanda por un factor, como en este caso el trabajo. La demanda por un insumo es una demanda derivada del producto final, al mismo tiempo que señala la relación con la demanda de los insumos que lo acompañan, las condiciones de ofertas de dichos factores y la tecnología que los combina. Estas son respuestas que la teoría del fondo de los salarios no ofrecía.

Pero la utilidad de esta línea de análisis se percibe cuando se establecen las condiciones bajo las cuales la demanda derivada logre ser más inelástica. Lo cual indica el poder del factor para elevar su retribución por parte de la oferta del factor.

Parece por estos tiempos que tales condiciones están meramente confinadas al ámbito de historia de las doctrinas. Se intentará *sistematizar las distintas derivaciones posteriores al desarrollo de Marshall y encontrar un puente entre ellas; al mismo tiempo, mostrar las peculiaridades metodológicas que subyacen a dichas derivaciones. Todo ello para ser de sustento a estudios empíricos que deseen emprenderse.*

Queda para otro trabajo mostrar las aplicaciones directas en el ámbito de la economía laboral, donde actualmente goza de plena vigencia. Ya que la herramienta tiene un gran poder empírico y una didáctica insita de fácil comprensión para quienes no han incursionado por el ámbito de las ciencias económicas.

---

<sup>2</sup> Esto puede ser expresado de la siguiente manera:  $w = wf / L^*$ ; donde  $wf$  es el fondo de salarios,  $w$ , es el salario de equilibrio, y  $L^*$  es el tamaño de la fuerza laboral, que viene dado. Cabe destacar que la función de demanda laboral es una hipérbola equilátera, la cual posee una elasticidad, para todos sus puntos, igual a la unidad.

<sup>3</sup> Esta teoría fue para la disciplina económica, lo que la teoría geocéntrica fue, en su momento, para la astronomía. No cabe dudas que a pesar de sus falencias, proporcionaba conclusiones útiles y en la práctica era eficaz. Por ejemplo la teoría geocéntrica era muy útil para la navegación. Quizás en otros contextos no redituaba similares resultados.

En el punto II del trabajo se muestra la importancia de entender las condiciones que subyacen a la elasticidad de la demanda derivada y su significado; veremos en forma cronológica las distintas derivaciones y aporte rutilantes al respecto. En el punto III se mostrará la resistencia de las reglas de Marshall ante el cambio de los supuestos iniciales y la incorporación de más de dos insumos al análisis. En el punto IV veremos los aspectos concluyentes, mientras que el último punto es dedicado a los apéndices.

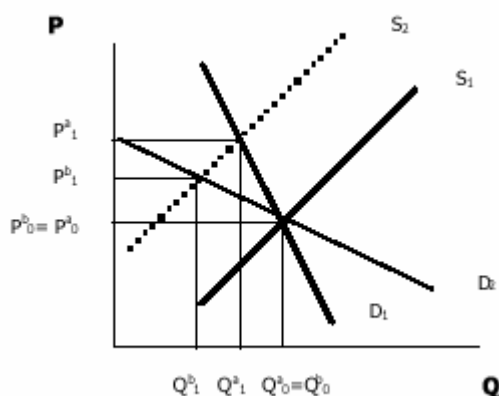
## II-Derivaciones de las reglas

Alfred Marshall[10, Libro V, pp. 385-389] da tratamiento a la Teoría de la Demanda Conjunta, ya que la demanda por los insumos factoriales es una demanda conjunta para la producción de un bien final. En el capítulo mismo, y en la notas al pie, presenta en forma literal e intuitiva, por un lado, y en forma gráfica por el otro, las condiciones necesarias para que la elasticidad de la demanda derivada logre ser mayor o menor, dependiendo de la interpretación. Al mismo tiempo, fiel a su postura expositiva, confina a las notas matemáticas [10, nota XIV y XV] una incipiente representación matemática de la elasticidad de la demanda derivada. Dicha representación es válida para el caso de coeficientes fijos de producción.

Así, este es el primer peldaño de lo que hoy conocemos como las reglas marshallianas; posterior a la obra de Marshall devino un proceso de demostración de la consistencia y validez de las condiciones sugeridas. Este proceso continua con Robert Cecil Pigou[15, pp.219-222], quien no adiciona aspectos sustanciales a lo presentado por Marshall más que la circunscripción de las condiciones requeridas para la monopolización. Luego prosigue con la primera derivación y demostración matemática, donde se constata la validez universal de las reglas, por parte de Hicks[1932, first edition, and 1963, second edition, pp. 192-197]. Continuamos con la derivación, para un caso particular, de Allen[1, pp. 362-367], donde nos encontramos en la postrimería de la demostración acabada de las reglas. Existe un trabajo de Muth[14], donde llega a idénticas conclusiones que las de Hicks, pero por una vía alternativa, y aportando respuestas adicionales.

La idea central de comprender las condiciones bajo las cuales una demanda derivada por un insumo productivo es más o menos inelástica deviene de la posibilidad de que una restricción en la oferta de tal insumo productivo pueda obtener un pequeño (gran) aumento en la retribución del mismo, a costa de una reducción grande (pequeña) en las cantidades contratadas del mismo. Esto puede ser plasmado en un simple gráfico del mercado de un factor en particular.

**Gráfico 1:** Comparación entre demandas factoriales de distinta elasticidad



Aquí tenemos dos demandas hipotéticas, donde  $D_1$  es más inelástica que  $D_2$ . De ahí que ante una contracción de la oferta del factor, de  $S_1$  a  $S_2$ . Lo cual genera un mayor aumento en la retribución del factor en la primera situación que en la segunda. Claro que esa mayor retribución se ve acompañada de una menor reducción en la cantidad.

Vemos aquí, que una reducción en la oferta del insumo tiene efectos distintos dependiendo de la elasticidad de la curva de demanda. La curva de mayor pendiente, exhibe al mismo tiempo una menor elasticidad, por lo cual el movimiento de la oferta se hace sentir más en el eje de los precios que en el de las cantidades, en comparación con la demanda de mayor elasticidad, que es la más plana.

Ahora exponemos en forma sucinta cada una de las derivaciones mencionadas, siguiendo el mero orden cronológico de tales aportes.

## II.1-Derivación de Alfred Marshall

Primero lo primero; así es que comenzamos por el progenitor de las condiciones mencionadas. Marshall se erige, como él lo reconoce, sobre algunos autores contemporáneos, como también precedentes. En forma concreta reconoce el aporte de Böhn Bawerk y de Irving Fisher sobre aspectos puntuales en la determinación de las condiciones de la elasticidad de la demanda derivada<sup>4</sup>.

De acuerdo a lo que se observa en dicho capítulo, la derivación que Marshall hace de las reglas corresponde a un caso particular, en el cual los coeficientes de producción son fijos o constantes. En el mismo se utilizan dos ejemplos, siguiendo la práctica marshalliana; el primero es desarrollado en el corazón del capítulo, mientras que el segundo es marginado a una de las notas al pie y las posteriores notas matemáticas.

Primero presenta el ejemplo de la industria de la construcción, donde se pregunta que sucederá en el muy corto plazo con una huelga de los yeseros (the plasterers), ya que hay una reducción de su oferta, y por lo tanto una suba del salario. El segundo ejemplo es el de la producción de navajas, para lo cual se utilizan dos insumos, hojas y mangos. Parece haber una postura ambigua en cuanto a si estaba pensando implícitamente en coeficientes de producción fijos o variables. El segundo de los ejemplos, como también en la nota XVI parece tener en mente la idea de coeficientes fijos. Mientras que en el ejemplo de la construcción no está claro:

"Then a temporary check to the supply of plasterers' labour will cause a proportionate check to the amount of building: the demand price for the diminished number of houses will be a little higher than before; and the supply prices for the other factors of production will not be greater than before."

Alfred Marshall[10, p.385]

Lo que es posible interpretar, es que cuando se produce una disminución en la oferta de un insumo, y la cantidad de la producción a la cual éste contribuye, se reduce en igual proporción, se tiene en mente una función de producción con coeficientes fijos. De otra forma, no habría razones para establecer el impacto sobre la producción en una manera mecánica. Al mismo tiempo plantea que el precio de demanda para el número de casas que ha disminuido será mayor que antes del cambio; mientras que el precio de oferta de los demás factores asegura no será mayor que antes.

Con respecto a esta afirmación existen dos interpretaciones; si el precio de los demás insumos se mantiene igual que antes está la posibilidad de sustitución entre los insumos; mientras que si se ve reducido está más cercana la posibilidad de interpretar que la función de producción es a coeficientes fijos.

---

<sup>4</sup> En la nota al pie 52 menciona al primero de estos autores, de quien extrae la idea de analizar la elasticidad de la oferta de los insumos productivos en el caso especial de no poseer sustitutos. Mientras que de Fisher, nota al pie 61, comparte la idea de tratar la Oferta Compuesta de manera similar a la Demanda compuesta.

De esta manera arribamos a las condiciones (o reglas) mencionadas en la obra:

**Regla 1:** *La demanda de un insumo será más inelástica, cuanto más importante logre ser el factor en cuestión para la producción, es decir cuanto menos sustitutos tenga en dicho ámbito a un precio moderado<sup>5</sup>.*

**Regla 2:** *La elasticidad de la demanda por un insumo factorial será menor cuanto menos sustitutos posea la demanda por el producto al cual contribuye a producir; es decir cuan más inelástica sea la demanda por el producto final.*

**Regla 3:** *La elasticidad de la demanda derivada será menor, cuanto menor sea la participación en el costo del producto final de dicho factor.*

**Regla 4:** *La elasticidad de la demanda derivada será menor cuanto menor sea la elasticidad de la oferta de los demás insumos factoriales; ya que de esta manera una caída en la cantidad requerida de tales factores logre reducir en gran proporción su precio, con lo cual el margen de ganancia para el primero se amplía.*

Como puede apreciarse, cada una de las condiciones mencionadas no requieren de comentarios adicionales; incluso suenan muy intuitivas.

### Desarrollo algebraico

En las notas matemáticas nos presenta, como mencionamos, una forma de interpretar la elasticidad de la demanda derivada, pero lejos está de ser una demostración pulida de ella. Siguiendo el supuesto de coeficientes fijos de producción es posible para el punto de equilibrio derivar el precio de demanda de uno de los insumos, entre la diferencia del precio de demanda del producto final y el precio de oferta del restante insumo productivo.

La ecuación de la demanda de mangos ( $f_1(x)$ ) es la diferencia entre la demanda por el bien final ( $F(x)$ ), las navajas, y la oferta de hojas ( $\phi_2(x)$ )<sup>6</sup>:

$$y = f_1(x) = F(x) - f_2(x) \quad \text{E- 1}$$

claro está se cumple en el punto de equilibrio. Mientras que la medición de la elasticidad de la demanda de mangos viene dada por la expresión:

$$I = - \left\{ \frac{x f_1'(x)}{f_1(x)} \right\}^{-1} \quad \text{E- 2}$$

la cual se encuentra elevada a la potencia 1 negativa por estar trabajando con la función de demanda inversa. Reemplazando por su expresión similar, de la primera ecuación, tenemos:

---

<sup>5</sup> Está claro que al incorporar esta regla, Marshall, considera la posibilidad que la sustitución interfactorial es posible: con lo cual dejaría de lado la posibilidad de una función de producción a coeficientes fijos. Más allá de su plena vigencia en períodos muy cortos de tiempo. Personalmente creo que avizoró la complejidad de dar tratamiento a funciones de producción que permitieran alguna sustitución interfactorial. Veremos que dicho tópico implicó sustanciales desarrollos y no pocas controversias.

<sup>6</sup> Utilizaremos la simbología proporcionada por Marshall en la Nota Matemática XV. Solo que denotamos a la elasticidad de la demanda derivada por  $\lambda$ ; en consonancia con la simbología que adoptaremos más adelante.

$$l = - \left\{ \frac{x F'(x) - x f_2'(x)}{f_1(x)} \right\}^{-1} \quad \text{E- 3}$$

Aquí tenemos la pendiente de la demanda final y de la oferta de los demás insumos productivos. Haciendo una ligera transformación, multiplicando y dividiendo el primer elemento de la diferencia por  $F(x)$  y respetando el signo negativo que precede al término en su totalidad obtenemos:

$$l = \left\{ - \frac{x F'(x)}{F(x)} \frac{F(x)}{f_1(x)} + \frac{x f_2'(x)}{f_1(x)} \right\}^{-1} \quad \text{E- 4}$$

Y ahora sí estamos en condiciones de poder deducir las reglas de Marshall, tal cual fueran esbozadas con antelación de manera discursiva. La elasticidad de la demanda derivada será más pequeña cuanto más grande sea la pendiente de la demanda por navajas; cuanto mayor sea la pendiente de la oferta de hojas y cuanto menor sea la participación del precio de los mangos sobre el precio de las navajas.

Pero en la versión moderna, tal cual nos advierte Bronfenbrenner[2, p.255] la ecuación anterior puede ser interpretada de la siguiente manera:

$$l = \left( \frac{1}{kh} + \frac{1-k}{ek} \right)^{-1} = \frac{keh}{e+h(1-k)} \quad \text{E- 5}$$

Donde  $k$  denota la participación que dicho insumo tiene sobre el costo total de producción,  $e$  es la elasticidad de la oferta del restante insumo productivo, y por último  $h$  es la elasticidad de la demanda del bien final. Esta simbología será utilizada de aquí en adelante con idénticas interpretaciones.

Una expresión de la anterior ecuación de manera genérica viene dada por:

$$l = F(h, k, e) \quad \text{E- 6}$$

Como se verá, tendremos una expresión homogénea que nos hará posible arribar a cada una de las derivaciones realizadas, tanto en los casos particulares como para el caso general. Aquí estamos en presencia de un caso particular, ya que no es posible obtener la primera regla de Marshall debido al supuesto de coeficientes fijos, es decir el coeficiente de elasticidad sustitución entre los insumos es nulo o  $\sigma=0$ . En el siguiente apartado derivamos las reglas.

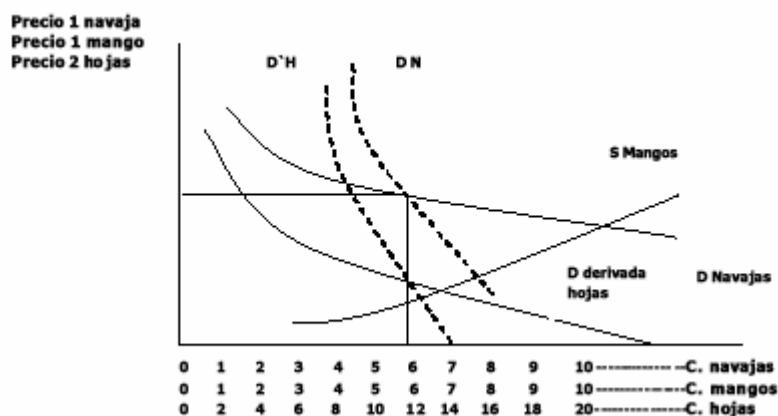
### Derivación gráfica e intuitiva

Existe una manera de interpretar el fenómeno esbozado a través de la versión gráfica. Claro está que se obtienen algunas ventajas, como una mayor comprensión, a costa de algunas desventajas, como el hecho de poder encasillar el fenómeno en cuestión en un caso particular. Es el camino adoptado por Marshall originalmente y el desarrollo en forma gráfica que podemos hallar en "Teoría de los Precios" [5, pp. 198-200].

Se parte de la modelización de un proceso productivo simple, donde la función de producción utiliza dos insumos que se combinan en dosis fijas para la obtención de una unidad de producto. Friedman, adopta el ejemplo de las navajas (original de

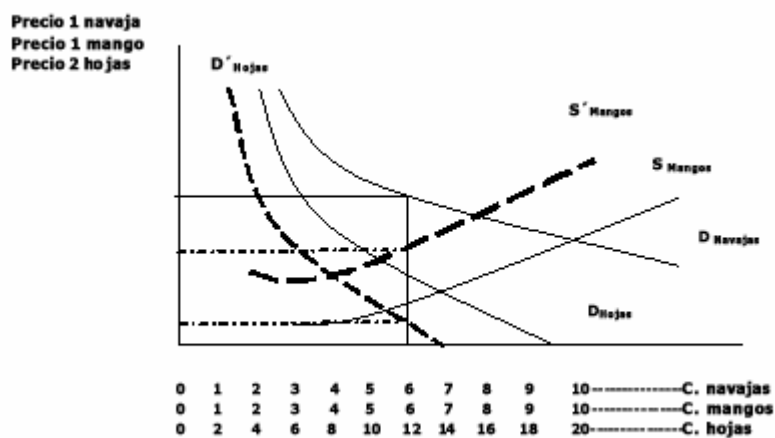
Marshall) las cuales requieren para su construcción hojas y mangos. Estipula que la relación es un mango y dos hojas por cada navaja, y que no se requiere de gastos adicionales para su montaje. A continuación se expone en forma gráfica<sup>7</sup> las tres condiciones o reglas que hacen más inelástica la demanda derivada.

**Gráfico 2:** Segunda regla (o condición) de Marshall. La relación con la elasticidad de la demanda final.



Vemos como al hacerse más empinada la demanda por navajas (en líneas de puntos), la nueva demanda derivada por hojas emula similar dirección. Es decir, se hacen ambas más inelásticas. Ahora seguimos con la tercera condición:

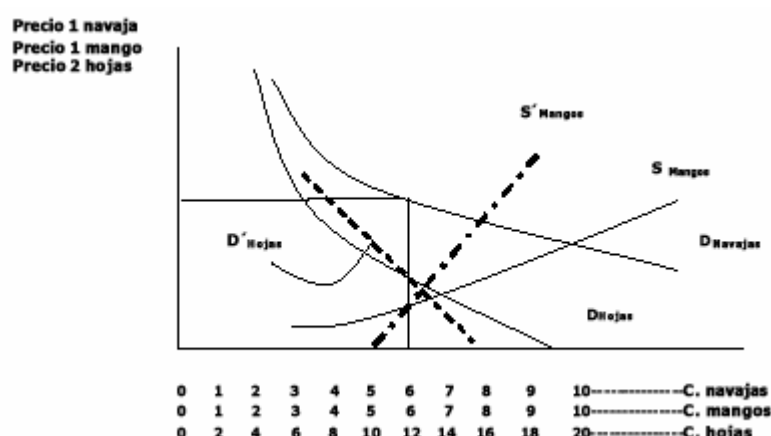
**Gráfico 3:** Tercera regla de Marshall. La participación del insumo en el costo.



Se demuestra que al aumentar el precio de oferta de mangos, representado por el desplazamiento de la curva de oferta hacia la línea punteada, el precio de demanda por hojas es menor para una misma cantidad de navajas; también se dimensiona este desplazamiento a través de la línea discontinua hacia abajo. Con lo cual la participación en el costo total de las *hojas* es menor que antes del cambio. Y por último se verá la cuarta condición:

<sup>7</sup> Presentamos los gráficos tomados de la versión castellano Teoría de los Precios. Las ilustraciones realizadas por Friedman son muy elocuentes y hacen posible una comprensión preliminar del problema bajo análisis.

**Gráfico 4:** Cuarta regla de Marshall. La relación con la elasticidad Oferta del insumo restante.



Aquí se muestra que al aumentar la pendiente de la oferta de mangos, nuevamente representada por la línea punteada, la demanda por hojas se hace más empinada. Esto significa que al aumentar la pendiente (reducción de su elasticidad) de la oferta del restante factor, la elasticidad de la demanda por hojas se reduce. Un aumento en la oferta de los restantes insumos es una reducción en la participación de los costos totales de las hojas.

Friedman[5, p. 200] muestra el ejemplo del petróleo como uno de los que mejor se ajusta en la utilización de las reglas de Marshall. La herramienta brinda una interpretación interesante de las causas por las cuales el precio del petróleo en 1975 tuvo una suba a nivel mundial. Claro que la decisión fue un recorte de la OPEP en los planes de producción, es decir un aumento en el precio del mismo en el corto plazo. Pero de acuerdo con las reglas este aumento logró mantenerse en el tiempo por dos razones:

- 1) En general el petróleo no posee sustitutos inmediatos en los procesos productivos. Es decir, la primera regla de Marshall.
- 2) La participación en el costo total no suele ser muy importante, por ejemplo en las industrias. Es decir, la tercera regla de Marshall.

En la práctica son estas dos reglas las que tienen mayor repercusión al momento de plasmar un determinado poder para aumentar el precio de un factor. Por dicha razón, la demanda por petróleo a la cual se enfrentaba la OPEP era demasiado inelástica; por lo menos a corto plazo<sup>8</sup>.

### Estática comparativa

Cada una de las reglas (en este caso podremos obtener solo las tres últimas, debido al supuesto  $\sigma=0$ ) se obtienen realizando la estática comparativa de la ecuación de la elasticidad de la demanda derivada con respecto a cada uno de sus parámetros<sup>9</sup>.

<sup>8</sup> En los estudios empíricos es un gran desafío realizar la estimación de la sustitución entre los insumos de un proceso productivo. En general, podemos decir, es una de las reglas de Marshall que más utilización posee.

<sup>9</sup> Metodológicamente no es apropiado llamarlos parámetros, ya que algunos de ellos son variables endógenas. Al mismo tiempo se nos plantea una disyuntiva, ya que el procedimiento no es el habitual para obtener la estática comparativa. Por ejemplo, los "shares" no son parámetros, son variables endógenas por que dependen de los precios relativos de los insumos y del nivel de producción. Para mayores detalles se remite al lector al apéndice "controversia sobre la tercera regla de Marshall".



$$\frac{\partial l}{\partial h} = \frac{ke^2}{[e+h(1-k)]^2} > 0 \quad \text{E- 7}$$

$$\frac{\partial l}{\partial k} = \frac{eh(h+e)}{[e+h(1-k)]^2} > 0 \quad \text{E- 8}$$

$$\frac{\partial l}{\partial e} = \frac{kh^2(1-k)^2}{[e+h(1-k)]^2} > 0 \quad \text{E- 9}$$

Aquí disponemos de la comprobación de tres de las cuatro reglas. La que no es posible comprobar es la primera de las enunciadas por Marshall; aquella donde la elasticidad de la demanda derivada es más pequeña cuanto menor es la posibilidad de sustitución entre los factores de la producción. Las expresiones son algo complejas, pero la interpretación es directa: las tres reglas son positivas, es decir mantienen una relación directamente proporcional con los parámetros del modelo.

## II.2-Aportes de Pigou

Posterior al desarrollo de Marshall, su discípulo en Cambridge, Albert Celil Pigou, utiliza las cuatro condiciones establecidas por Marshall que podrían tornar más inelástica la curva de demanda derivada de un insumo. Pigou, en particular, [15] aplica estas condiciones al problema de la regulación de la oferta de servicios ferroviarios en Inglaterra. Debemos recordar que dicho autor estaba abocado al entendimiento de las condiciones de monopolio y competencia monopolística en casos concretos.

No realiza mayores avances en cuanto a la demostración de las condiciones establecidas por Marshall, sino, más bien hace un uso incuestionable de las mismas. En particular son aplicadas al ámbito de las imperfecciones del mercado. En especial, Pigou, en dicha parte de la obra estaba preocupado por el surgimiento de imperfecciones del mercado y el consabido efecto sobre el bienestar general. Por tal razón se vale de las reglas marshallianas para establecer las condiciones o requisitos para el surgimiento de un monopolio.

## II.3-Derivación de John R. Hicks

En Hicks [7, pp. 192-197] se nos brinda la primera demostración de la consistencia y validez de las condiciones requeridas para que la demanda derivada por un insumo logre ser más inelástica. Para ello, parte de la utilización de algunos supuestos no considerados por Marshall; pero debemos destacar el encuadre metodológico logrado por el autor. Esto es, que alcanza la derivación de las reglas desde una conducta optimizadora por parte de la firma sujeta a las restricciones pertinentes. La restricción viene dada por una función de producción homogénea lineal, en consonancia con la

teoría del agotamiento del producto<sup>10</sup>. Así se refiere a una industria competitiva con una firma representativa, cuya posibilidad tecnológica viene dada por dicha función de producción.

Hicks demuestra el cumplimiento de las cuatro reglas, aunque pone en duda el cumplimiento de una de ellas (la tercera); sin antes tomar los debidos recaudos de adicionar estructura particular al problema en tratamiento. La mayor estructura requiere que la elasticidad de la demanda final sea mayor que el coeficiente de elasticidad sustitución entre los insumos.

Pero en el caso de Marshall, al estar considerando la imposibilidad de sustituir factores de producción (consecuencia directa de los coeficientes de producción fijos utilizados), cumplía con los requisitos impuestos por Hicks; de esta forma la derivación de Marshall es a todas luces impecable.

Hicks arriba a la expresión *general* de la elasticidad de la demanda derivada, en término de los parámetros relevantes al momento de probar las reglas<sup>11</sup>.

$$l = \frac{s(h+e) + ke(h-s)}{h+e-k(h-s)} \quad \text{E- 10}$$

También podemos ponerlo en términos más genéricos:

$$l = F(s, h, k, e) \quad \text{E- 11}$$

La demostración que es relegada al apéndice matemático de su libro presenta determinadas peculiaridades. La derivación si bien es consistente con una postura optimizadora de la firma, no sigue un prolijo camino hacia la expresión general de la elasticidad. Más bien los pasos no son presentados de una forma lógica e intuitiva, lo cual impide arribar ágilmente a ella<sup>12</sup>.

Es pertinente hacer algunas consideraciones adicionales respecto de la elasticidad sustitución parcial; es decir  $s$ . El cálculo y el concepto fueron introducidos por Hicks[7], justamente para poder probar la primera de las reglas. Intuitivamente podemos decir que mide como cambia el ratio de insumos productivos ( $K/L$ ) ante un cambio en los precios relativos de dichos insumos ( $p_K/p_L$ ). Se proporcionarán mayores detalles en los apéndices del trabajo.

---

<sup>10</sup>En el caso de hablar de una industria competitiva compuesta por muchas firmas, el óptimo de cada una de las firmas surge de producir en aquel nivel donde el Costo Medio es mínimo. Por ello, para cada una de las firmas el nivel de producción máximo es indeterminado, es decir su oferta es indeterminada. El mismo se determina dentro de la Industria de manera simultánea. Esta es una de las razones por las cuales Hicks adopta la modelización de una industria unifirma. Se pueden hacer dos supuestos alternativos acerca del procedimiento a seguir cuando la producción de la Industria debe variar ante un cambio en la demanda de la misma: podemos considerar que el número de firmas permanece intacto y que cada una de ellas se distribuye el incremento de manera proporcional; mientras que por otro lado podemos decir que cada firma sigue produciendo lo mismo, pero el incremento se distribuye entre las empresas entrantes. Lo mismo vale ante una caída en la Demanda por el bien que la Industria vende. Si se desean obtener mayores detalles respecto al ajuste de largo plazo de la industria competitiva, recurrir a Maurice[11].

<sup>11</sup> Es apropiado tener presente que  $\lambda$  y  $\eta$  se toman en valores negativos pero esto no modifica las conclusiones.

<sup>12</sup> Relegamos al apéndice la derivación de Hicks. Pero es loable destacar que la derivación de Allen[1] nos permite arribar, claro que para un caso particular, arribar de manera prolija y directa a la expresión final. Quizás, desde nuestro punto de vista, en Sato y Kotzumi[18, pp. 109-110] se nos presente una moderna derivación clara, intuitiva y muy general para derivar una expresión de la elasticidad de la demanda derivada; fácilmente extensible a casos particulares y multifactoriales.

Algo para destacar es el mantenimiento del equilibrio de largo plazo<sup>13</sup> de la firma. En Hicks, el mecanismo de ajuste ante el cambio de precio de uno de los insumos, se ve compensado por la variación en el precio del restante insumo y en la dirección contraria. Así el costo medio queda balanceado y en equilibrio con el precio del producto final que es mantenido constante.

$$\bar{p} = cme_{LP} \quad E-12$$

### Estática comparativa

$$\frac{\partial l}{\partial s} = \frac{(1-k)(h+e)^2}{[h+e-k(h-s)]^2} > 0 \quad E-13$$

$$\frac{\partial l}{\partial h} = \frac{k(e+s)^2}{[h+e-k(h-s)]^2} > 0 \quad E-14$$

$$\frac{\partial l}{\partial k} = \frac{(h+e)(e+s)(h-s)}{[h+e-k(h-s)]^2} ?^{14} \quad E-15$$

$$\frac{\partial l}{\partial e} = \frac{k(1-k)(h-s)^2}{[h+e-k(h-s)]^2} > 0 \quad E-16$$

Salvo en el caso de la tercera regla, en el resto obtenemos resultados concluyentes, es decir determinación en el signo de las derivadas estáticas comparativas y en la dirección esperada. En la ecuación 13 tenemos que imponer restricciones sobre los valores de  $h^{15}$ ,  $s$ , y  $e$ ; para así, obtener el signo en la dirección esperada.

### II.4-Derivación de R. G. D. Allen

Allen[1] deriva la elasticidad de la demanda factorial para una firma individual, para lo cual utiliza una función de producción homogénea lineal, al mismo tiempo que se vale de un caso extremo donde a la firma le son ofrecidos el resto de los insumos factoriales en cantidades ilimitadas a un precio dado<sup>16</sup>.

Siguiendo un proceso de derivación desarrollado en [1, pp. 365-366] se arriba a la siguiente expresión muy simple:

<sup>13</sup> Para disponer de un análisis más detallado y preciso del comportamiento de las demandas factoriales de una firma dentro de una industria competitiva se sugiere consultar Ferguson and Saving[3]. Se muestran los diversos mecanismos de ajustes posibles en la industria para alcanzar el equilibrio de Largo Plazo.

<sup>14</sup> Esta regla, la tercera en la versión de Marshall, segunda en la versión de Hicks[7] ha suscitado una controversia, ya que se cumple en el sentido expresado por Marshall para determinados casos dependiendo del valor de  $\eta$  y  $\sigma$ , como también del signo de la elasticidad de oferta de los demás insumos "e". Tiene más relevancia empírica un valor de  $e > 0$ , con lo cual para que la regla se cumpla  $\eta > \sigma$  Brofenbrenner[2]

<sup>15</sup> En situaciones prácticas dichas restricciones se resuelven suponiendo que la elasticidad de la demanda del producto es infinita; con lo cual se resuelve el dilema. Al mismo tiempo es muy loable la utilización de dicho supuesto. Para mayores detalles consultar Hamermesch[6]. Se recomienda en particular el capítulo 3, para aquellos que deseen tener un inventario amplio y detallado de las distintas estimaciones realizadas para la elasticidad de las demandas factoriales (en particular la de trabajo) y la elasticidad de sustitución entre los insumos productivos.

<sup>16</sup> Hasta el momento existe un supuesto implícito y es el de libre disponibilidad de insumos productivos. Es decir, no existen factores en cantidades fijas.

$$l = [kh + (1-k)s] \quad \text{E- 17}$$

y tal cual como venimos realizando, en términos más genéricos es posible expresarla:

$$l = F(s, h, k)$$

Podemos extraer una jugosa interpretación, al poder descomponer el efecto sobre la elasticidad de dos elementos. El primero es llamado *efecto sustitución*, mientras que el segundo es el *efecto escala*. Uno representa el impacto que existe al aumentar el costo del producto, y por consiguiente el precio del producto final, con lo cual los demandantes reducen las cantidades adquiridas. Luego el efecto sustitución mide el ajuste entre la utilización de un factor en detrimento del factor que vio incrementada su retribución<sup>17</sup>.

Con respecto al *equilibrio de largo plazo* de la firma, y por consiguiente su mantenimiento, en la presente derivación al ser la oferta del restante factor infinitamente elástica, el proceso de ajuste ante cambios en el precio del factor en consideración es diferente al utilizado por Hicks. Cuando el precio de dicho factor varía, el costo medio también lo hace. Por lo cual para mantener el equilibrio entre el mínimo costo medio y el precio de mercado, quien también varía es el precio del producto final.

### Estática comparativa

$$\frac{\partial l}{\partial s} = 1 - k > 0 \quad \text{E- 18}$$

$$\frac{\partial l}{\partial h} = k > 0 \quad \text{E- 19}$$

$$\frac{\partial l}{\partial k} = h - s > 0 \quad \text{E- 20}$$

En el caso de Allen podemos obtener una demostración de tres de las cuatro reglas. Queda marginada la regla que vincula la elasticidad de la demanda factorial al cambio en la elasticidad de la oferta de los demás insumos factoriales; puesto que Allen supone que esta última es infinitamente elástica. Como podemos apreciar, las tres derivadas de estática comparativa se reducen a expresiones muy sencillas y fáciles de interpretar, en comparación a la derivación de Hicks.

En el caso de la tercera regla, la cual es positiva, es debido a que  $\sigma$  es negativo. Esto es originado en la definición que Allen utiliza para las elasticidades de sustitución parcial. Aquí  $\sigma$  debe interpretarse como  $\sigma_{11}$ , mientras que en el caso de Hicks estábamos hablando de  $\sigma_{12}$ . El primero de ellos es siempre negativo, mientras que el segundo no. Se darán mayores detalles en el apéndice.

---

<sup>17</sup> Una útil ilustración del efecto sustitución es presentada por Hicks[9]. Para entenderlo debemos pensar en una firma donde la cantidad de producción está dada; es decir  $q=0$  en la formulación de Allen ( $e=8$ ), o cuando  $q=8$  en el caso que  $e=0$  en la fórmula general de Hicks.

## II.5-Derivación de Richard Muth

La derivación que realiza dicho autor está focalizada en la demanda factorial de una industria. En el trabajo dicha industria es la de la construcción y uno de los insumos son los terrenos sobre los cuales se construirán las propiedades. La intención es incorporar en el análisis todas las fuerzas que inciden sobre la variación de la cantidad demandada de un insumo. Dichas fuerzas vienen dadas por variaciones en el precio de dicho insumo, cambios tecnológicos que repercuten sobre la función de producción (neutrales y no neutrales), variaciones en la oferta del restante factor y cambios en la demanda del producto final.

El planteo de Muth es la modelización a través de un sistema de ecuaciones de la demanda factorial por los insumos que utiliza la industria, la oferta de ellos, la función de demanda por el producto final de la industria y por supuesto la función de oferta de dicho producto. Considera que la industria produce un único bien final combinando dos insumos factoriales y que en dichos mercados es tomadora de precios. Adicionalmente realiza supuestos concernientes al cambio tecnológico, que la función de producción de la industria es homogénea lineal, que los aumentos de producción de la industria se cubren a través del ingresos de empresas nuevas, etc.

Al disponer de un sistema de seis ecuaciones se permite expresar las variables del mismo en tasas de cambio relativas, para así obtener la estática comparativa respectiva. En un primer paso deriva una expresión de la tasa de cambio relativa en la cantidad demandada de un insumo en función de las variables que se encuentran en la siguiente expresión:

$$dB^* = \left\{ \frac{sh - (k_A s - k_B h)e_A}{D} \right\} dp_B^* + \left\{ \frac{-h(s + e_A)}{D} \right\} a + \left\{ \frac{k_A(s + h)e_A}{D} \right\} b \\ + \left\{ \frac{-(s + e_A)(1 + h)}{D} \right\} d + \left\{ \frac{s(-h + e_A)}{D} \right\} \left( \frac{-k_A}{k_B} e \right) \quad E-21$$

donde

$$D = k_B s - k_A h + e_A \rightarrow \text{donde } D > 0 \quad E-22$$

$dB^*$  es el cambio relativo en la cantidad demanda del factor B, lo cual depende, de un cambio relativo en el precio de dicho insumo,  $dp_B^*$ , un cambio relativo en el precio del producto final (a), un cambio relativo en el precio del insumo A (b), un cambio tecnológico relativo neutral sobre la función de producción (d), y de un cambio tecnológico relativo ahorrador del insumo B ( $(-k_A/k_B)e$ ).

A nuestros efectos lo interesante de la anterior expresión reside en el coeficiente que acompaña al cambio relativo en el precio del insumo B ( $dp_B^*$ ). Esta es una expresión similar a la obtenida por Hicks en su apéndice, a partir de las cuales calculando las derivadas parciales pertinentes es factible encontrar las cuatro reglas de Marshall<sup>18</sup>.

<sup>18</sup> Es importante analizar en la anterior expresión la posibilidad de levantar supuestos tales como el estado estacionario en el cual piensan Marshall, Hicks, Allen, entre otros autores. Y vemos al mismo tiempo que es factible incorporar todos esos aspectos, como por ejemplo el cambio tecnológico, en una sola expresión. También nos podemos percatar que le adicionamos más complejidad al problema y que las conclusiones alcanzadas por Hicks, y demás autores, se mantienen al momento de arribar a una expresión de la demanda derivada de un insumo.

El coeficiente que denota la elasticidad de la demanda derivada por el insumo B surge de permitir un cambio en las cantidades relativas de dicho insumo a través de un cambio relativo en su precio, manteniendo los demás efectos, enunciados con antelación, constantes. Este es el concepto de derivada y ceteris paribus, que podemos expresar así:

$$l = \frac{\partial \ln B}{\partial \ln p_B} = \frac{\partial dB^*}{\partial dp_B^*} = \left\{ \frac{s h - (k_A s - k_B h) e_A}{D} \right\} \quad \text{E- 23}$$

Para nuestro interés el coeficiente que acompaña el cambio en el precio relativo del factor B no es otra cosa que la elasticidad. Así arribamos a una expresión similar a la obtenida por Hicks (pero por una vía alternativa), en función de los parámetros que nos permitirán derivar las reglas. Al mismo tiempo incorpora la posibilidad cambio tecnológico, neutral y sesgado, algo que los anteriores autores no brindan tratamiento alguno.

Utilizando una metodología similar, obtiene la tasa de cambio relativa de la oferta de producto de la industria. A diferencia de lo obtenido con la elasticidad de la demanda factorial, aquí no encuentra el autor ninguna paradoja al estilo Hicks; es decir cuando realiza la derivada estática comparativa de la elasticidad de la oferta del producto ante cambio en el share (participación) de uno de los insumos.

## II.6-Comparaciones

**Tabla 1:** Comparación entre las distintas derivaciones alternativas

| Concepto                          | Alfred Marshall (Pigou)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | John R. Hicks                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | R. G. D. Allen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|-----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Supuestos                         | <ul style="list-style-type: none"> <li>Está pensando en una industria (demanda del factor)</li> <li>El factor 1 es utilizado en forma especializada en la industria<sup>19</sup>.</li> <li>La función de producción es del tipo coeficientes fijos;</li> <li>Los demás factores no son especializados de la industria, pero se ofrecen en forma elástica;</li> <li>La economía se encuentra en estado estacionario.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>El análisis es sobre la industria competitiva de una sola firma;</li> <li>Parte del mismo supuesto en relación a la utilización del factor</li> <li>La función de producción es del tipo homogénea lineal;</li> <li>Idéntico análisis que Marshall;</li> <li>La economía se encuentra en situación de estado estacionario.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>El análisis recae sobre una empresa competitiva individual</li> <li>El factor 1 es utilizado en forma especializada en la industria;</li> <li>El resto de los factores cooperantes son ofrecidos en forma perfectamente elástica a la firma.</li> <li>La economía se encuentra en situación de estado estacionario.</li> </ul> |
| Ajustes al Equilibrio Largo Plazo |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | En el caso de Hicks el precio de venta del producto no varía ante variaciones en el precio del factor 1; por lo cual el ajuste se logra por medio del balanceo entre los precios de ambos insumos, para el mismo coste mínimo de producción.                                                                                                                                 | El mecanismo de ajuste expuesto por Allen ante la variación del precio del factor 1 es entre el precio del producto final, ya que el precio de los demás insumos permanecen inalterados.                                                                                                                                                                              |

<sup>19</sup> No es de extrema necesidad que el factor sea utilizado en forma especializada en la industria; aunque si se requiere algún tipo de elasticidad en la curva de oferta de este factor.

Una vez desarrolladas las diferentes derivaciones, es interesante mostrar las similitudes en las conclusiones y los diferentes caminos utilizados a tal fin. Básicamente la diferencia reside en la adopción de algunos supuestos que otras demostraciones no comparten. Lo que si queda claro es que no impide o restringe las conclusiones, salvo en los casos particulares donde algunas de las reglas de Marshall no pueden ser probadas.

Es importante realizar una comparación entre las derivaciones alternativas de las reglas y las conclusiones a las cuales arriban cada una de ellas. También se expondrán las expresiones de las cuales se desprenden la constatación de las reglas en cada una de las derivaciones, como el puente existente entre tales.

**Tabla 2:** Comparación entre las distintas variantes y conclusiones sobre las reglas.

| Regla                                                                                                                              | Caso General                                | Casos particulares                 |                                         |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|------------------------------------|-----------------------------------------|
|                                                                                                                                    | John R. Hicks                               | Alfred Marshall                    | R. G. D. Allen                          |
| Regla 1: $\partial\lambda/\partial\sigma$                                                                                          | +                                           | ?                                  | +                                       |
| Regla 2: $\partial\lambda/\partial\eta$                                                                                            | +                                           | +                                  | +                                       |
| Regla 3: $\partial\lambda/\partial\kappa$                                                                                          | ?                                           | +                                  | +                                       |
| Regla 4: $\partial\lambda/\partial e$                                                                                              | +                                           | +                                  | ?                                       |
| Expresión del $\lambda$                                                                                                            | $l^H = \frac{s(h+e) + ke(h-s)}{h+e-k(h-s)}$ | $l^M = \frac{keh}{e+h(1-k)}$       | $l^A = (k_1 h + k_2 s)$                 |
| Forma de arribar desde $\lambda^H$                                                                                                 |                                             | $\lim_{s \rightarrow 0} l^H = l^M$ | $\lim_{e \rightarrow \infty} l^H = l^A$ |
| ?: no concluye, signo indeterminado; requiere de estructura adicional; ?: no es posible ser derivada por los supuestos utilizados. |                                             |                                    |                                         |

### III-Análisis de la solidez de las reglas

Es interesante a más de un siglo de la publicación de las reglas por Marshall (primera edición en inglés de *Los Principios*), dimensionar la plena vigencia de tal descubrimiento, y que los esfuerzos posteriores a dicha edición vinieron a darle cuerpo y tonificar las ideas primigenias. Dichos avances se focalizaron en:

- 1) Demostración matemática: para casos particulares y el caso general.
- 2) Extensión de las reglas al caso de múltiples insumos factoriales.
- 3) Modificación de algunos supuestos iniciales.

El punto inicial está en plena concordancia con lo plasmado en el comienzo de este trabajo; el cual siguió un mero orden cronológico de los desarrollos. A continuación comenzamos el repaso del punto 2; es decir cuando se incorporan al análisis más de dos insumos factoriales, para luego adentrarnos al punto 3, cuando se levanta el supuesto de competencia perfecta, tanto en el mercado del producto como en el de factores.

#### III.1-Caso más de dos insumos factoriales

Hasta el momento hemos trabajado con solo dos insumos factoriales; a partir de los cuales se derivaron las reglas esbozadas inicialmente por Marshall. Al utilizar dos insumos, y en el afán de mayor simplicidad para extraer conclusiones, se considera el insumo sobre el cual estamos interesados analizar, mientras que el segundo insumo

incorpora a todos los demás. Pero una de las falencias que acarrea esta alternativa es la imposibilidad de trabajar con factores complementarios; cuando trabajamos en un modelo de dos insumos ambos están condenados a tener una relación de sustitución entre sí<sup>20</sup>.

Entonces desde el momento que se incorporan factores adicionales es posible lograr este tipo de relaciones de complementariedad que están descartadas en el caso de dos insumos. Adicionalmente se obtiene una mayor complejidad, tanto en el tratamiento como en la derivación intuitiva de conclusiones. **Al mismo tiempo, el tránsito de un modelo de dos insumos a uno que incorpora más de dos no desnaturaliza las conclusiones de las cuatro reglas marshallianas.**

Los esfuerzos iniciales para trabajar con la demanda derivadas en el caso de muchos insumos factoriales estuvieron insito en los trabajo de Hicks [9], Samuelson y otros. Los dos primeros llegan a las mismas conclusiones que en el caso de dos insumos. Mientras que hubieron aportes adicionales, pero dando tratamiento al caso general en donde la oferta de los demás insumos factoriales permanece rígida (o su elasticidad es cero).

Debemos destacar la diferencia entre la definición de factores sustitutos y complementarios en términos bruto y en términos netos. En la primera dirección el análisis se desprende de la hipótesis de maximización de la firma, mientras que en la segunda dirección surge del problema de minimización de los costos para un nivel de producto dado; es decir nos movemos sobre la misma isocuanta ante cambio en el precio relativo de los factores.

La principal referencia que logra compactar los diferentes análisis mencionados precedentemente es Sato y Koizumi [18, pp.108] donde se brinda un exhaustivo tratamiento matemático de las reglas marshallianas, como también así de teoremas<sup>21</sup> que se desprenden de la mencionada paradoja de Hicks en cuanto a la tercera regla.

Por último debemos resaltar la aparición de nuevas reglas. Este es el caso de la primera regla (relacionada con la elasticidad sustitución interfactorial), y la cuarta regla (relacionada con la elasticidad de la oferta de los demás insumos). Para el primero de los casos, se extenderá a  $n(n-1)/2$  reglas primeras de Marshall; donde "n" es el número de insumos considerados. Mientras que en relación a la elasticidad de la Oferta de los insumos factoriales, excluyendo el que está bajo análisis, se adicionará una regla por cada insumo que se incorpore.

### III.2-Modificaciones en los supuestos iniciales:

La derivación de R. Muth muestra cómo cambiando algunos supuestos, como el cambio tecnológico, mantenido constante en las tres derivaciones previas, no altera las conclusiones de Marshall. Sino, más bien adiciona algo de complejidad a la derivación pero la expresión de elasticidad de la demanda derivada se muestra incólume.

Sin embargo, el cambio de supuesto que genera intriga sobre la naturaleza de las conclusiones, es el de competencia imperfecta en ambos mercados. Las reglas

---

<sup>20</sup> De no ser sustitutos los factores en un mundo de dos de ellos, estamos contradiciendo la esencia de la economía, la cual se caracteriza por modelizar conductas de los individuos cuando estos eligen entre alternativas restringidos por los recursos que tienen a su alcance. Cabe aclarar que nos referimos al ámbito de la producción, es decir cuando la producción está dada y se produce un cambio en los precios relativos.

<sup>21</sup> Los teoremas están relacionados a las condiciones requeridas para que la regla enunciada por Marshall se cumpla en esa dirección y evitar la paradoja "es importante ser importante". Existen dos condiciones la fuerte y la débil; pero no nos explayaremos aquí. El trabajo ahonda en la formalización pero descuida el tratamiento intuitivo del fenómeno.



fueron derivadas para un contexto de clara existencia de relaciones competitivas o de equilibrio de Largo Plazo para las firmas; tanto en el mercado de Producto como en los mercados de los insumos. Es importante preguntarse qué sucede con las reglas de Marshall al modificar el contexto de competencia mantenido. **La respuesta es que la naturaleza de las reglas no se modifica en su esencia. Sólo que algunas de ellas son derivadas en forma ligeramente distinta.**

Ahora nos sumergiremos en el caso de existencia de competencia imperfecta tanto en el mercado del producto, como en el mercado de los insumos. En forma aislada presentaremos la situación donde la industria posee una sola firma que provee el producto, por lo cual no tiene sentido diferenciar la demanda de la Industria de la demanda de la firma; el monopolio. Acto seguido, nos involucramos en el contexto donde existe un único comprador de un insumo particular. Así es indistinto considerar la oferta de la firma como la de la industria.

### **Competencia imperfecta I: en el mercado del Producto**

Situación que se define en la teoría de los precios como Monopolio. Aquí la firma optimiza en el punto donde el Costo Marginal se iguala al Ingreso Marginal, mientras que el precio que carga por dicha cantidad de equilibrio es superior al Costo Marginal debido a que posee una demanda de pendiente negativa y decide posicionarse en el tramo elástico de la misma, si suponemos busca maximizar los beneficios.

Suponiendo que el monopolista no posee poder en el mercado de factores es fácil demostrar que la menor cantidad que produce en el equilibrio conduce a una menor contratación de los insumos factoriales, para el mismo nivel de remuneración de ellos, que en el caso de ser una empresa competitiva en el mercado del producto.

Ahora, siguiendo nuestra inquietud sobre las alteraciones de las reglas, podemos seguir las ideas esbozadas por Stigler[20, pp.296-303]. En el caso del monopolio la regla primera de Marshall y la tercera son extrapoladas con facilidad y sin pérdida de esencia. Mientras que en el caso de la segunda regla, la cual involucra la elasticidad de la demanda del producto, ahora es ligeramente modificada, por lo cual la elasticidad de la demanda derivada por un factor será mayor cuanto mayor logre ser la elasticidad del Ingreso Marginal. En el caso de la última regla estamos suponiendo que la oferta de los demás insumos es perfectamente elástica (debido a que no posee poder el monopolio sobre el mercado de esos factores). En caso de no ser así, y si la oferta presenta elasticidad entre (0, 8), el monopolista también tendría poder sobre este mercado; pero dicha incidencia es analizada en el punto venidero.

De esta manera la regla que se ve alterada de acuerdo a lo que venimos tratando es la siguiente:

$$\frac{\partial l}{\partial h_{IMG}} > 0$$

E- 24

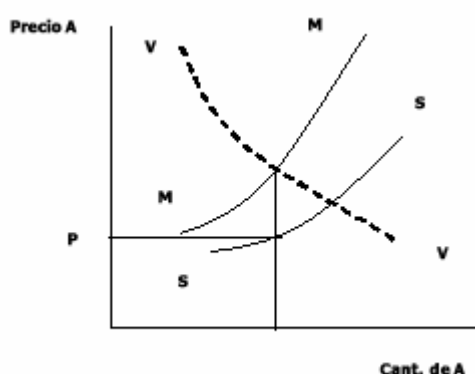
Aquí se plantea la derivada de la demanda del insumo con respecto a la elasticidad del Ingreso Marginal. Dicha expresión involucra algunos cálculos que no deseamos mostrar en el presente trabajo. A simple vista podemos decir que la elasticidad del Ingreso Marginal es menor que la elasticidad de la Demanda por el Producto en el caso del monopolio.

## Competencia imperfecta II: en el mercado de factores

Ahora supongamos en forma aislada una empresa que posee poder en el mercado de factores, con lo cual no es posible distinguir entre la oferta del mercado de ese insumo y las oferta individuales, porque hay un solo oferente.

Aquí la regla que vería cambiada, no su esencia, pero sí la manera de obtenerse; es la cuarta. Dicha regla expresa: cuando mayor la elasticidad de la oferta de los demás insumos que intervienen en la producción, mayor será la elasticidad de la demanda por el insumo que nos preocupa. Ahora nos interesa el Costo Marginal en los demás insumos productivos, antes que la elasticidad de su oferta; pero la dirección de cambio es la misma.

**Gráfico 5:** Representación del Monopsonio en el mercado de un factor determinado.



En el gráfico podemos ver que la regla de decisión para la empresa es contratar cantidades adicionales del insumo hasta el punto donde la demanda **VV** (hipotética) por el factor corte al Costo marginal del mismo, curva **MM**. Esto significa que en situación de monopsonio se contratan las mismas cantidades que en el caso de competencia perfecta pero a un precio mayor; o al mismo precio de competencia se contratan una menor cantidad de dicho insumo. El precio de competencia viene representado por **P** en el gráfico, mientras que la curva **SS** muestra la oferta en el caso de competencia en dicho mercado.

En cuanto a la derivada que debemos realizar para obtener la respectiva regla es:

$$\frac{\partial l}{\partial e_{CM}} > 0 \quad \text{E- 25}$$

la cual tiene en cuenta la elasticidad del Costo marginal (CM) del insumo que es vendido en condiciones de monopsonio; antes que la elasticidad de la oferta de dicho insumo.

Otro caso particular que puede presentarse es cuando en el mercado de factores tenemos un solo comprador y al mismo tiempo un solo vendedor. Aquí hablamos de *monopolio bilateral*, pero el análisis y modificaciones que genera en las reglas no serán tratadas aquí, aunque podemos avizorar una modificación en las reglas donde se ven involucradas la elasticidad de la demanda por el producto y aquella donde entra en escena la oferta de los demás insumo, o el agregado de los mismos.

## V-Aspectos concluyentes

Como corolario de lo visto tenemos que la demanda por un insumo es una demanda derivada de la demanda del producto final. Y que la clave de estudiar los determinantes de la elasticidad de dicha demanda nos aporta información a cerca de la posibilidad que una reducción de la oferta de dicho factor tenga como fruto una retribución mayor. Esas condiciones se conocen actualmente como las 4 reglas de Marshall; cada una de las cuales vincula la elasticidad como una función de la elasticidad de la demanda final, de la relación técnica de sustitución entre los insumos, la participación del insumo en cuestión en el costo total, y la elasticidad de la oferta de los restantes factores contribuyentes.

Las reglas fueron enunciadas por Marshall[10] acompañadas de una formulación matemática para el caso especial donde los coeficientes de producción son fijos. Debimos esperar hasta Hicks[7] para obtener una demostración de las reglas partiendo de un proceso de optimización de la firma sujeto a las restricciones tecnológicas. El supuesto más importante es que la función de producción es homogénea lineal. Luego tenemos la derivación de Allen[1], un caso particular en el cual los restantes insumos factoriales le son ofrecidos a la empresa a un precio fijo. Más cercanos en el tiempo, tenemos la derivación de Muth[14], quien llega a similares conclusiones que Hicks pero introduce cambios en elementos que el anterior autor mantenía constantes.

Hasta el momento las reglas fueron derivadas para situaciones competitivas. Se mostró que al introducir imperfecciones en los mercados, tanto en el del producto final como en el de factores, no alteran las conclusiones alcanzadas por Marshall. Lo mismo sucede al introducir más de dos factores en el análisis; solo que debemos adicionar reglas al introducir cada factor. Mientras que en el caso de la paradoja de Hicks una de las reglas se mantiene si le adicionamos estructura al problema.

## VI-Apéndices

De las demostraciones matemáticas de las reglas la que requiere de un mayor grado de concentración e ingenio es la realizada por Hicks; mientras que la de Allen es más simple e intuitiva. A continuación pasamos revista de las mismas.

### 1-Derivación de Hicks

No es la impresión de cualquier neófito que se tropieza con el apéndice de Hicks (donde expone la derivación de las reglas) quien se percató de lo dificultoso e intrincada de la misma. El profesor Bronfembrener también se percató de este detalle en su trabajo [2, p. 257] en una de las notas al pie. Aquí trataremos de tejer puentes entre los pasos expuestos en el apéndice de la teoría de los salarios. El objetivo que se persigue es la obtención de una expresión de la elasticidad en 4 parámetros para derivar posteriormente las reglas.

Partimos de una función de producción que combina dos insumos la cual es homogénea lineal:

$$y = y^0 \rightarrow y^0 = F(K, L) = Lf_L + Kf_K \quad \text{E- 26}$$

de acuerdo al cumplimiento del Teorema de Euler, lo cual implica agotamiento del producto. De la anterior expresión es factible obtener, al diferenciar por segunda vez, las derivadas directas y cruzadas

$$\frac{L}{K} = -\frac{f_{KK}}{f_{LL}} \rightarrow Kf_{KK} = -Lf_{KL} \quad \text{E- 27}$$

Al mismo tiempo debemos recordar las condiciones de primer orden del problema de minimización de los costos<sup>22</sup>:

$$f_K = \frac{r}{P} \quad \text{E- 28}$$

$$f_L = \frac{w}{P} \quad \text{E- 29}$$

Como paso siguiente se deben introducir las definiciones de las elasticidades que luego prestarán su utilidad:

$$h = -\frac{p}{Y^d} \frac{\partial Y^d}{\partial p} \quad \text{E- 30}$$

Es la elasticidad de la demanda final; mientras que:

$$e = \frac{r}{K^s} \frac{\partial K^s}{\partial r} \quad \text{E- 31}$$

es la elasticidad de la oferta del insumo K, que puede interpretarse como el conjunto de los insumos restantes. Y por último tenemos:

$$l = -\frac{w}{L^d} \frac{\partial L^d}{\partial w} \quad \text{E- 32}$$

Al aplicar el diferencial total del producto, y respetar la igualdad entre ingresos y costos, después de la variación en el precio del insumo L, y haciendo los reemplazos correspondientes, tenemos:

$$PdY^0 = w dL + r dK \quad \text{E- 33}$$

$$PdY + YdP = w dL + Ldw + r dK + Kdr \quad \text{E- 34}$$

Y recordando E-33, se puede expresar como:

$$YdP = Ldw + Kdr \quad \text{E- 35}$$

Y haciendo algunos ajustes podemos introducir las fórmulas de las elasticidades:

---

<sup>22</sup> Vale aclarar que Hicks está suponiendo que la firma está en el punto de Equilibrio de Largo Plazo, es decir en el mínimo Coste Medio, por lo cual el Costo Marginal es igual al Precio (P) del producto que la firma elabora.

$$\frac{PdY}{h} = \frac{w dL}{l} - \frac{rdK}{e} \quad \text{E- 36}$$

Ahora busquemos el dK

$$dK = \frac{Ke}{r} dr = \frac{Ke}{r} d \underbrace{(pf_K)}_{CPO} \quad \text{E- 37}$$

Resolviendo d(pf<sub>K</sub>) tenemos:

$$d(pf_K) = dpf_K + p[f_{KK}dK + f_{KL}dL] \quad \text{E- 38}$$

$$d(pf_K) = -\frac{r}{Y} \frac{dY}{h} + pf_{KL} \left[ -\frac{L}{K} dK + dL \right] \quad \text{E- 39}$$

Por lo tanto, ahora reemplazando en la expresión anterior de dK, obtenemos:

$$dK = \frac{Ke}{r} \left\{ -\frac{r}{Y} \frac{dY}{h} + pf_{KL} \left( -\frac{L}{K} dK + dL \right) \right\} \quad \text{E- 40}$$

$$\frac{rdK}{ke} = -\frac{r}{Y} \frac{dY}{h} pf_K \left( -\frac{L}{K} dK + dL \right) \quad \text{E- 41}$$

Realizando algunos pasajes y acomodando términos, tenemos:

$$\frac{pdY}{h} = -\frac{pY}{r} \frac{rdK}{Ke} + \frac{p^2 Y f_{KL}}{r} \left( dL - \frac{L}{K} dK \right) \quad \text{E- 42}$$

$$\frac{pdY}{h} = -\frac{1}{1-k} \frac{rdK}{e} + \frac{w}{s} dL - \frac{wL}{K} \frac{dK}{s} \quad \text{E- 43}$$

$$\frac{pdY}{h} = \frac{w}{s} dL - \left[ \frac{r}{1-k} dK \left( \frac{1}{e} + \frac{k}{s} \right) \right] \quad \text{E- 44}$$

Ahora hemos arribado a un sistema de 3 ecuaciones en 3 incógnitas, entre las ecuaciones: E-33, E-36 y E-44. Para resolverlo introducimos la ecuación **E-33** en la **E-36** y en **E-44**. Así obtenemos del primer paso:

$$\frac{wdL}{h} + \frac{rdK}{h} = \frac{wdL}{l} - \frac{rdK}{e} \quad \text{E- 45}$$

$$\left[ \frac{1}{h} - \frac{1}{l} \right] wdL = - \left[ \frac{1}{h} + \frac{1}{e} \right] rdK \Rightarrow \left[ \frac{l-h}{hl} \right] wdL = - \left[ \frac{e+h}{he} \right] rdK \quad \text{E- 46}$$

Reemplazando **E-33** en **E-44**, arribamos a:

$$\frac{wdL}{h} + \frac{rdK}{h} = \frac{wdL}{s} - \left[ \frac{r}{1-k} dK \left( \frac{s+ek}{es} \right) \right] \quad E- 47$$

y si realizamos algunos ajustes pertinentes en la expresión

$$\left[ \frac{s-h}{hs} \right] wdL = -rdK \left[ \frac{1}{h} + \frac{s+ek}{es} \right] = -rdK \left[ \frac{(1-k)es + hs + ekh}{h(1-k)es} \right] \quad E- 48$$

Ahora, al haber eliminado el dY, nos quedan dos ecuaciones en dos incógnitas, dL y dK. Entre ellas eliminamos al dL y dK; con lo cual conseguimos:

$$\left[ \frac{s-h}{hs} \right] \left[ \frac{(1-k)es + hs + ekh}{h(1-k)es} \right] = \left[ \frac{l-h}{hl} \right] \left[ \frac{he}{e+h} \right] \quad E- 49$$

y de esta última expresión debemos despejar a  $\lambda$  en función de los cuatro parámetros que nos interesan, de manera de encontramos con la expresión buscada, y que se ha mostrado en el trabajo:

$$l = \frac{s(h+e) + ke(h-s)}{h+e-k(h-s)} \quad E- 50$$

## 2-Controversia sobre la tercera regla de Marshall<sup>23</sup>

Se generó controversia en torno a dicha regla, luego de los aportes iniciales de Hicks[7, p. 194]. En el fondo no es más que un problema metodológico, ya que como dijimos en la primera parte del trabajo, demostró la validez universal de las reglas pero advirtió sobre la necesidad de imponer más estructura al problema para que la regla tercera tome la dirección esbozada por Marshall y no la dirección opuesta.

Hicks acuñó la frase “*es importante no ser importante, siempre y cuando los consumidores sustituyan más rápido que los productores*”. En el caso que los productores sustituyan más rápido que los consumidores, es importante ser importante en el costo total de producción para obtener una demanda derivada más inelástica.

Existieron posiciones encontradas a cerca de la factibilidad de tal paradoja. Por ejemplo Allen[1, pp.504] demuestra que tal paradoja no tiene cabida, por consiguiente el cumplimiento de la tercera regla no requiere más estructura que la hipótesis de conducta optimizante por parte de la firma.

La referencia obligatoria en tal aspecto es Maurice[12] donde se exponen las causas metodológicas que derivan en la propuesta de Hicks y de Allen, dependiendo de los puntos de partidas seleccionados. Pari pasu, la dificultad de la tercera regla reside en la utilización de la estática comparativa cuando no es del todo prolijo hacerlo. Es decir, al ser los shares variables endógenas, no es del todo feliz realizar una derivada de una variable endógena (la elasticidad de la demanda derivada) cuando cambia otra variable endógena.

<sup>23</sup> Para una comprensión más profunda de los aspectos metodológicos se sugiere consultar *The Structure of the Economics*, de Eugene Silberberg[19]. En particular el capítulo 7 y 8.

Tal cual como se presentó al comienzo, es posible plantear a la elasticidad de la demanda derivada en función de los parámetros sobre los cuales posteriormente se realizará la estática comparativa. Pero en realidad, esto surge del hecho que la elasticidad se determina en simultáneo con dichos parámetros y es través del teorema de la función implícita que establecemos la relación funcional. Así, la determinación para un punto de equilibrio es la siguiente<sup>24</sup>:

$$f(l, e, k_1, k_2, s_{11}, s_{12}, s_{22}, h) = 0 \quad \text{E- 51}$$

Como se ha mencionado en nota al pie, los shares dependen de los precios relativos de los insumos, y dependiendo del problema de optimización, dependen del precio del producto final (problema de maximización), o del nivel de producción (problema de minimización del costo).

### 3-Elasticidad sustitución entre los factores

Hasta el momento hemos utilizado el concepto de elasticidad sustitución parcial entre los factores productivos introducido por Hicks para probar la primera regla de Marshall. Si bien hubo numerosos desarrollos posteriores a la definición de Hicks, las mismas no son coincidentes en algunos aspectos. La intención es poder, a través de este concepto, catalogar a un par de factores como complementarios o sustitutos. Al mismo tiempo existen dos definiciones de complementariedad y sustitución, como se ha anticipado.

Existen al menos 3 medidas diferentes de sustitubilidad:

- 1) Elasticidad sustitución directa
- 2) Elasticidad de sustitución parcial (Allen)
- 3) Elasticidad sustitución de Morishima(1967).

Partiendo de la existencia de una función de producción multifactorial:

$$Y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) \quad \text{E- 52}$$

es posible mostrar en forma superficial las expresiones generales para el cálculo de cada una de las definiciones anteriores.

Para el caso de la elasticidad sustitución directa, se calcula entre dos insumos, manteniendo el resto de los insumos de la función de producción como fijos. De ahí que en el caso de dos insumos tenemos una reducción de dicha expresión.

$$s_{ij}^D = \frac{f_i x_i + f_j x_j}{x_i x_j} \frac{|B_{ij}|}{|B|} \quad \text{E- 53}$$

$B_{ij}$  es el menor principal orlado de la matriz B; lo cual surge del problema de minimización del costo sujeta a la restricción tecnológica.

---

<sup>24</sup> Esto es para el caso de dos insumos. Tranquilamente podemos suponer que el resto de los insumos, o el agregado de ellos, representados por el insumo 2 le son ofrecidos a la firma de una manera ilimitada a un precio dado. Con lo cual e deja de preocuparnos, al igual que en el caso de Allen.

$$s_{ij}^A = \frac{\sum f_i x_i \frac{|B_{ij}|}{|B|}}{x_i x_j} \quad \text{E- 54}$$

para el caso de dos insumos se cumple  $\sigma_{ij}^D = \sigma_{ji}^A$ .

Y por último tenemos la medida de elasticidad de Morishima:

$$s_{ij}^M = \frac{f_i}{x_i} \frac{|B_{ij}|}{|B|} - \frac{f_j}{x_j} \frac{|B_{ij}|}{|B|} \quad \text{E- 55}$$

o puesta en términos de la definición de Allen:

$$s_{ij}^M = \frac{f_j x_j}{f_i x_i} [s_{ij}^A - s_{jj}^A] \quad \text{E- 56}$$

Pero la medida de Morishima posee una cualidad inusual; la de asimetría. Es decir la elasticidad sustitución  $\sigma_{ij}^M \neq \sigma_{ji}^M$ .

#### 4-Elasticidad sustitución entre los factores: para producto fijo y producto variable.

Cuando hablamos de elasticidad sustitución parcial podemos referirnos a dos tipos distintos de elasticidades; aquella que se obtiene del planteo de un problema de minimización del costo de la firma sujeta a un nivel de producción dado, y aquella surgida de permitir variaciones en el producto de la firma, la cual es obtenida de un proceso de maximización del beneficio de la firma.

En el primer caso estamos preocupados por la elasticidad de la demanda de un insumo o varios cuando se modifica el precio de uno de ellos, permaneciendo constante el nivel de producción de la firma y el precio de los insumos restantes. Mientras que en el segundo caso buscamos la elasticidad del precio de los distintos insumos cuando se altera la cantidad de un insumo en particular, manteniendo constante el Precio (**P**) del producto y las cantidades de los demás insumos (**x1, x2, ..., xn**). De aquí extraemos como conclusión que es importante tener siempre en mente las variables que son mantenidas constantes al momento de calcular la elasticidad. En dichas fórmulas participan elasticidades sustitución (o complementos como dice Hicks)<sup>25</sup> parciales.

---

<sup>25</sup> De aquí que en el caso de mantener constante el nivel de producción es más factible que la relación entre los insumos sea la de sustitución; mientras que cuando alteramos el nivel de producción esta relación se invierte y la complementariedad entre los insumos es más frecuente, Hicks[9]



## VII-Bibliografía

- [1] ALLEN, R. G. D. (1938): "*Análisis matemático para economistas*", Aguilar, Madrid.
- [2] BRONFENBRENER, MARTÍN (1969): "*Notes on the elasticity of derived demand*", Oxford Economic Paper, pp. 255-261
- [3] FERGUSON, C. E. y SAVING, Thomas (1969): "Long-run scale adjustments of a perfectly competitive firm and industry"; **AER**; Vol. 59; n° 5; December; pp. 774-783
- [4] FERGUSON, C. E. (1969): "*The Neoclassical theory of production and distribution*", Cambridge University Press, Chapter 12.
- [5] FRIEDMAN, MILTON (1997): "*Teoría de los precios: Apuntes para un curso*", Ediciones Altaya S.A., Barcelona.
- [6] HAMERMESCH, Daniel S. (1996): "*Labor demand*", Princeton University Press; Princeton, New Jersey.
- [7] HICKS, JOHN R. (1932): "La teoría de los salarios", Segunda edición, 1963.
- [8] HICKS, JOHN R. (1961): "*Marshall third rule: a further comment*", **Oxford economic Papers**, 13, pp. 262-265.
- [9] HICKS, JOHN R. (1970): "*Elasticity of substitution again: substitutes and complements*", **Oxford Economic Papers**, June, pp. 289-296.
- [10] MARSHALL, ALFRED (1920): "*Principles of Economics*", 8<sup>th</sup> edition, Macmillan, London.
- [11] MAURICE S. CHARLES (1972): "Long-run factor demand in a perfectly competitive industry"; **JPE**, 80, pp. 1271-1279.
- [12] MAURICE S. CHARLES (1975): "*Of the important of being unimportant: an analysis of the paradox in Marshall's third rules of derived demand*", **Economica**, November, pp. 385-393.
- [13] MOZACK, J. L. (1938): "*Interrelations of production, price, and derived demand*", **JPE**, 46(December), pp. 761-787.
- [14] MUTH, RICHARD (1964): "*The derived demand curve for a production factor and the industry supply curve*", **Oxford Economic Papers**, 16, pp. 221-234.
- [15] PIGOU, ALBERT CECIL (1948): "*Economics of Welfare*", 4<sup>th</sup> edition, Macmillan, London.
- [16] ROBERSTON, D. H. (1961): "*Another comment*", **Oxford Economic Paper**, 13, p. 266.
- [17] SAMUELSON, PAUL ANTHONY (1971): "*Fundamentos del análisis económico*", 3º edición, Editorial El Ateneo, Buenos Aires.
- [18] SATO, R. Y KOITZUMI, T. (1970): "Substitutability, complementarity and the theory of derived demand", **Review of economics studies**, 37, pp. 107-118.

[19] SILBERBERG, EUGENE (1990): "*The structure of the economics*", 2<sup>nd</sup> edition, editorial Mc-Graw Hill, Washington.

[20] STIGLER, GEORGE (1964): "*Teoría de los Precios*"; Revista de Derecho Privado; Madrid.