

Redes de equilibrio con comunicación bidireccional: Redes lineales con nodos de activación intermedios

Juan M.C. Larrosa - Fernando Tohmé

Departamento de Economía

Universidad Nacional del Sur

CONICET

Bahía Blanca, Argentina

jlarrosa@criba.edu.ar, ftohme@criba.edu.ar

Resumen

Este trabajo es una extensión al enfoque de Larrosa y Tohmé (2003) en el cual se modifica la función de pagos al permitir que la información fluya en ambos sentidos. Los costos siguen siendo pagados por quién inicia la conexión por lo que esta asimetría aún sigue influyendo en la determinación de la topología final de equilibrio. Encontramos que diversas topologías surgen como equilibrios estrictos de Nash, en particular la red de línea secuencial con nodos activos intermedios, es decir, los agentes se colocan en una línea y, agente de por medio, se van conectando con el agente predecesor y con el agente posterior. Esta estructura no sólo constituye un equilibrio estricto de Nash sino que es óptima y eficiente, además de ser la menos asimétrica entre las que verifican estas propiedades.

Palabras claves: Juegos de formación de redes, comunicación bidireccional, red de línea.

Abstract

Equilibrium Networks in Two-Way Communications: Linear Networks with Intermediate Activation Nodes

In this paper we extend the results in Larrosa and Tohmé (2003) by modifying the pay-off function to allow a two-way flow of information. Costs are still paid off by the initiator of a connection. This asymmetry still determines the shape of the topology that may arise in equilibrium. We find that under these assumptions, several topologies are Nash networks, in particular the linear sequential structure with intermediate active nodes. That is, agents align themselves and those in the intermediate positions act as initiators of connections towards both the next and the previous agent in the line. This structure does not only constitute a strict Nash equilibrium in the network formation game, but it is also optimal and efficient. Furthermore, it is the less asymmetric one among the structures that verify those properties.

Keywords: Network formation game, two-way communication, linear network.

JEL Classification System: C72, L13, L20

1. Introducción

La interacción entre agentes puede ser analizada en diversas formas. Una manera de representar intercambios directos que ha atraído mucho interés en los últimos años es a través de *redes*. Esta concepción fue primeramente adoptada en sociología y antropología. Para los expertos de esas áreas constituye una forma gráfica de entender la influencia de los entornos de agentes sobre las conductas individuales. Los sociólogos y antropólogos, estudiando redes reales, han acumulado una vasta cantidad de evidencia que ayuda a entender cómo el comportamiento humano es moldeado por el comportamiento de otros agentes.

En términos matemáticos, una red es un *grafo*, donde los nodos representan agentes individuales y los arcos o enlaces representan la transferencia entre agentes de un *bien de utilidad* (por ejemplo, información, prestigio personal, etc.). La literatura económica introdujo recientemente herramientas de teoría de juegos en este marco de análisis. En vez de estar interesados sólo en los aspectos descriptivos, algunos teóricos de la economía han encarado el estudio de cómo se forman las redes y de qué las hace estables o eficientes (Jackson y Wolinsky 1996, Bala y Goyal 2000, Dutta y Jackson 2000). En el análisis mediante teoría de juegos podemos distinguir dos corrientes, una basada en una concepción estratégica de las interacciones mientras que la otra concibe a éstas como resultado de la acción de coaliciones entre agentes. Este último análisis basado en la teoría de los juegos cooperativos, muchas veces requiere apelar al supuesto de transferencia de utilidad entre los agentes, el cuál es difícil de justificar en muchos casos y suele ser computacionalmente costoso (Qin 1996, Dutta y otros 1998, Slikker y van den Nouweland 2001).

El enfoque estratégico o *no cooperativo*, a su vez, sólo requiere la definición de estrategias disponibles para los agentes así como la caracterización de las correspondientes funciones de pagos. Dado cierto protocolo o regla de interacción, los agentes deciden si se conectan o no la red, evaluando los beneficios de conexión (o desconexión) con otros agentes. Las decisiones racionales de los agentes llevan a equilibrios de Nash sostenidos por redes. Por un ligero abuso de lenguaje se identifica a los equilibrios de Nash con las redes que les sirven de soporte. Este es, precisamente, el enfoque adoptado por este trabajo.

Este trabajo sigue la línea de Larrosa y Tohmé (2003) aunque ampliando ahora la posibilidad de circulación de la información. Consideramos que la información fluye bidireccionalmente mientras que los enlaces son sostenidos por quienes inician los enlaces. Bajo el esquema de pagos que definiremos, la función de costos es acumulativa. A medida que la información pasa por más agentes se hace más cara. El problema económico consiste en encontrar la estructura de red que permita minimizar el nú-

mero de conexiones a la que vez que maximizar el flujo de información. Encontramos que un tipo particular de red lineal, con nodos activadores intermedios, resuelve este problema.

En la sección 2 empezamos nuestro análisis con la definición de grafos de flujo bidireccional. La sección 3 se observa la presentación del modelo. En la sección 4 determinaremos la arquitectura de equilibrio y mostramos cómo los equilibrios verifican algunos criterios de estabilidad y optimalidad. La sección 5 discutimos las analogías y diferencias con el caso monodireccional.

2. El caso de flujo de información bidireccional

Modelaremos las redes como grafos dirigidos con flujos bidireccionales. Un agente que establece enlaces con otros agentes puede tener acceso a la información de aquellos pero recíprocamente, los otros acceden a la información poseída por él. Adicionalmente, especificamos que quién inicia el enlace debe pagarlo. Esta asimetría modificará las estructuras óptimas respecto al caso considerado cuando el flujo de información es monodireccional (Larrosa y Tohmé, 2003).

2.1 Definiciones

A continuación definimos algunos conceptos y herramientas que van a resultar útiles en el desarrollo del presente trabajo. Sea $N = (1, \dots, n)$ un conjunto de agentes. Para evitar resultados triviales siempre vamos a suponer que $n > 3$. Si i y j son dos miembros típicos de N , un enlace entre ellos, sin intermediarios, originado en i y finalizado en j será representado como ij . La interpretación de ij es que i establece un contacto con j que permite a i tener acceso a la información de j , así como a su red de contactos.

Cada agente $i \in N$ es propietario de una cierta información, $v_i \in Z_+$ (es decir, representada por simplicidad como un entero positivo). Por convención supondremos que el costo de establecer un enlace es 1. Además, prescribimos que la información de cada agente es lo suficientemente valiosa como para que valga la pena establecer un enlace con él¹, hecho que representaremos con $v_i > 1$ (es decir que el valor de la información siempre es mayor que el costo de accederla directamente). Como se mencionó, i puede acceder a más información formando enlaces con otros agentes. Los agentes tratarán de maximizar la utilidad de la información disponible para ellos así como minimizar el costo de conexión con otros agentes. Para lograrlo emplearán *estrategias*. Cada estrategia de $i \in N$ es un vector $g_i = \langle g_{i,1}, \dots, g_{i,i-1}, g_{i,i+1}, \dots, g_{i,n} \rangle$ de $(n - 1)$ dimensiones donde cada $g_{i,j}$ para $j \neq i$ vale 0 o 1. Esto se interpreta como que i establece un enlace directo con j si $g_{i,j} = 1$ mientras que si $g_{i,j} = 0$ dicho enlace

¹ Con este supuesto descartamos la posibilidad de la aparición de la red vacía (es decir, los agentes permanecen todos aislados) como estructura de equilibrio en nuestro modelo.

no existe. El conjunto de todas las estrategias se denota con G_i . Restringimos nuestro análisis sólo a los casos de estrategias puras, lo cual implica que $|G_i| = 2^{n-1}$. Finalmente, $G = G_1 \times \dots \times G_n$ denota el conjunto de perfiles de estrategias en la interacción entre los agentes de N .

La existencia de un enlace directo ij indica una comunicación simétrica entre i y j . Esto es, $g_{i,j} = 1$ indica que i ha establecido una comunicación con j que le permite acceder a la información de j y pero también le permite a j acceder a la información poseída por i . La asimetría surge en los costos. Aquí, i ha iniciado la conexión por lo que es ella quién debe solventar el costo de la conexión, mientras que j no incurre en costo alguno. Las estructuras con esta característica son denominadas redes de flujo *bidireccional*.

Siguiendo a Bala y Goyal (2000: 1190-1191) denotamos la clausura de g como $\bar{g} = cl(g)$ y definida por $\bar{g}_{i,j} = \max\{g_{i,j}, g_{j,i}\}$ para cada i y j en N . Definimos $N_d^{g_i} = \{k \in N \mid g_{i,k} = 1\}$ como el conjunto de agentes con quienes i establece un enlace *directo* de acuerdo a su perfil de estrategias g_i . Definimos también a $N_u^{g_i} = \{h \neq k \mid h \in N \mid g_{i,h} \geq 2\}$ como el conjunto de agentes con quienes i establece un enlace *indirecto* de acuerdo a su perfil de estrategias g_i . Definimos $N^{g_i}(i; g) = \left\{k \in N \mid i \overset{g}{\leftrightarrow} k\right\}$ como el conjunto de agentes con quienes i establece un enlace dirigido bidireccional de acuerdo a su perfil de estrategias g_i . En palabras, dada una estrategia conjunta g , tenemos que $j_1 \in N^{g_{j_0}}$, $j_2 \in N^{g_{j_1}}$, ..., $j_m \in N^{g_{j_{m-1}}}$. Un sendero desde $j = j_m$ hacia $i = j_0$, denotada como $j \overset{g}{\leftrightarrow} i$, tiene una *longitud*, la cardinalidad de la secuencia $j_1, j_2, \dots, j_{m-1}, j_m$, es decir m , el cual indica el número de enlaces intermedios entre j e i . Nótese que un enlace dirigido es un sendero de longitud 1.

En las redes de flujo bidireccional el perfil de estrategias puede ser representado como un grafo dirigido $g = (g_1, \dots, g_n)$ sobre N . Esto es, en el grafo dirigido bidireccional los elementos de N son los nodos mientras que cada enlace establecido como $g_{i,j} = 1$ lo vamos a representar gráficamente por medio de un segmento que une j con i . Usaremos un círculo blanco cercano a i para representar el hecho de que i fue quien inició el enlace.

Anotamos al conjunto de agentes accedidos (directamente o de otro modo) por i como $N^{i:g} = \left\{ k \in N \mid k \xrightarrow{g} i \right\}$. No incluimos a i a fin de facilitar las derivaciones posteriores del modelo². Nó-

tese que $N^{i:g} = N_d^{g_i} \cup N_u^{g_i}$, acorde con las otras definiciones precedentes. Sea $\mu_i : G \rightarrow \{0, \dots, n \times (n-1)\}$ el número de enlaces en todos los senderos que finalizan en i , originados por agentes en $N^{i:g}$ bajo cualquier estrategia conjunta:

$$\mu_i(g) = \left| \left\{ (j, k) \in N \times N : g_{j,k} = 1, \text{ y } \exists l \in N^{i:g} \text{ y } l \xrightarrow{g} i \text{ con } j, k \in l \xrightarrow{g} i \right\} \right|.$$

Nótese que puede haber más de un sendero desde j hacia i .

Otros supuestos del modelo son:

- (i) El valor v_i no cambia a medida que más jugadores conozcan dicha información;
- (ii) El valor de v_i no cambia a medida que un individuo en particular conozca más información;
- (iii) Las informaciones son transmitidas claramente a través de la red (no hay distorsión de información ni decaimiento de flujo) tal que el valor de v_i para j es el mismo sea que i y j estén conectados directa o indirectamente.

3. El Modelo

Si bien la información fluye hacia ambos lados a través de un enlace, usamos la representación mediante grafos dirigidos porque permiten dar una interpretación gráfica al costo de iniciación del enlace ($g_{ij} = 1$ implica que i financia el enlace, lo que no es equivalente a que $g_{ji} = 1$, contrariamente a lo que ocurre en un grafo no dirigido). Aquí lo que se destaca es la simetría en los beneficios de quienes están conectados (ambos disfrutan de la misma información) y la asimetría de los costos (quien inicia el enlace debe pagar la conexión).

El problema consiste en determinar las estructuras que pueden surgir como equilibrios estratégicos entre los agentes y si éstas son óptimas paretianas o no. En particular encontramos que los equilibrios *mínimos* de Nash o equilibrios de Nash con el mínimo número de enlaces se obtienen en una red de estrella en la que los iniciadores están en la periferia. Esta red es estable y óptima.

Veamos un par de ejemplos:

² Realmente debiera ser $N^{i:g} = \left\{ k \in N \mid k \xrightarrow{g} i \right\} \cup \{i\}$. Se incluye i en $N^{i:g}$ para indicar que i conoce su propia valuación, a pesar del hecho mencionado anteriormente de que i no establece un enlace directo consigo mismo.

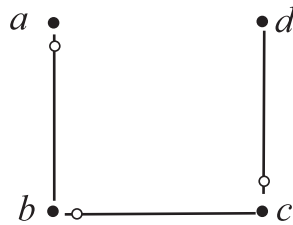
Ejemplo 1. Consideremos un grupo de cuatro agentes, $N = \{a, b, c, d\}$. Una estrategia conjunta $g = \langle g_a, g_b, g_c, g_d \rangle$ puede ser representada como un perfil de estrategias. Esto se puede ver en la Tabla 1 (el asterisco indica quién inició el enlace).

Cada fila es la estrategia elegida por uno de los agentes. Las columnas corresponden a los agentes. Una entrada 1 en la fila i y columna j significa que la estrategia del agente i prescribe establecer un enlace con el agente j . Las entradas en la diagonal principal están con cruces dado que los agentes no pueden establecer un enlace con ellos mismos. En la Figura 1 podemos ver el grafo dirigido que se corresponde con g .

Tabla 1. Perfil de estrategias para el Ejemplo 1

Estrategia	a	b	c	d
g_a	X	1*	0	0
g_b	1	X	1*	0
g_c	0	1	X	1*
g_d	0	0	1	X

Figura 1. Red formada por el perfil de estrategias del Ejemplo 1

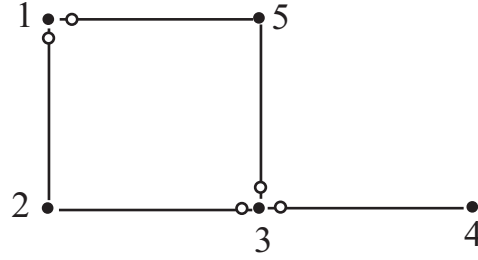


Ejemplo 2. Supongamos que tenemos $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y la estrategia $g = \langle g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 \rangle$ dada por la Tabla 2 (* indica al iniciador de una conexión).

Tabla 2. Perfil de estrategias para el Ejemplo 2

Estrategia	1	2	3	4	5
g_1	X	1*	0	0	1*
g_2	0	X	1*	0	0
g_3	0	0	X	1*	1*
g_4	0	0	0	X	0
g_5	0	0	0	0	X

Figura 2. Red formada por el perfil de estrategias del Ejemplo 2



La Figura 2 muestra la red correspondiente. Tenemos que $N^{1;\bar{g}} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $N^{2;\bar{g}} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $N^{3;\bar{g}} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $N^{4;\bar{g}} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $N^{5;\bar{g}} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Nótese que bajo flujo de información monodireccional los resultados serían: $N^{1;g} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $N^{2;g} = \{2, 3, 4, 5\}$, $N^{3;g} = \{3, 4, 5\}$, $N^{4;g} = \{4\}$ y $N^{5;g} = \{5\}$. Esto es, bajo información monodireccional en g tenemos que 1 accede a la información de todos los agentes mientras que 4 y 5 sólo acceden a su propia información. Ahora, con información bidireccional tenemos que bajo g todos acceden a la información de todos. Los números de enlaces requeridos para obtener la información son $\mu_1(g) = 5$, $\mu_2(g) = 3$ y $\mu_3(g) = 2$, mientras que $\mu_4(g) = \mu_5(g) = 0$, lo que no cambia para el flujo mono o bidireccional.

Veremos ahora cómo los pagos de los agentes determinan las elecciones de estrategias. Para este análisis es fundamental modelar las formas de conexión que pueden surgir en función a los pagos y los costos de cada agente. Para ello es crucial distinguir entre los enlaces directos establecidos por un agente y los enlaces indirectos (que surgen no sólo de sus decisiones individuales sino de las de otros agentes). Los enlaces directos son aquellos enlaces que tienen un sendero de longitud unitaria mientras que los enlaces indirectos son aquellos que tienen un sendero de longitud superior a uno, definidos para un agente i como:

$$N^{i;g} = \{k \in N \mid g_{i,k} = 1\} \cup \{h \neq k \mid h \in N \mid g_{i,h} \geq 2\} \quad (1)$$

$N^{i;g}$ es un conjunto que recolecta a todos aquellos agentes que directa o indirectamente están conectados con i . Esta forma de caracterizarlo discrimina el grado de cercanía de los enlaces. El primer término de (1) corresponde a los *enlaces directos* del agente i mientras que el segundo se refiere a los *enlaces indirectos* del agente. Los pagos de i son la suma de toda la información que puede ser accedida por este agente, menos el costo de los senderos, es decir la correspondiente a las conexiones directas e indirectas establecidas de acuerdo a g (recuérdese que cada enlace se supone tiene costo unitario). La intuición aquí es que i obtiene un pago por acceder a mayor información pero al mismo tiempo tiene que pagar un cargo o arancel por cada uno de los enlaces en los senderos hacia las fuentes de informa-

ción. Esta forma de financiar las conexiones es, por lo tanto, acumulativa. A medida que la información pasa por más agentes se hace más cara, dado que hay que pagarles a todos los intermediarios. En la Figura 3 se observa como i se conecta directamente con j_1 y j_2 , de los que obtiene información directamente (conjunto de puntos espaciados). Pero también obtiene información indirecta dado que j_2 esta conectado con k_1 , siendo también que k_1 se conectó con k_2 y ésta con k_3 (conjunto de puntos densos). En definitiva, i accede a la información de los dos conjuntos y debe pagar por los enlaces incluidos dentro de ambos conjuntos. Obsérvese que en esta representación de un caso de flujo monodireccional, j_3, j_4 y k_4 nunca son accedidos por el agente i .

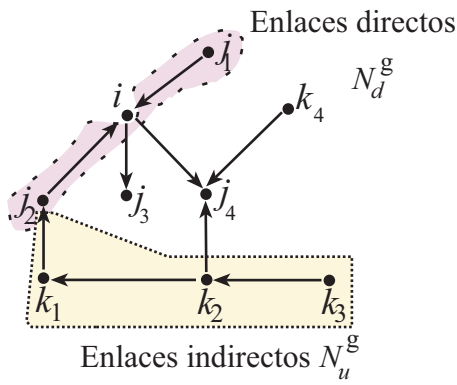


Figura 3. Esquema de conexiones totales e información accedida en un caso de flujo monodireccional

En el caso de flujo bidireccional, la estructura de costos está asociada a los mismos conjuntos punteados del caso monodireccional (Figura 4) pero ahora la información de todos los agentes es accedida por cada uno de los integrantes de la red, dado que la mera existencia de una conexión permite que sea transmitida sin importar quién inicie el enlace.

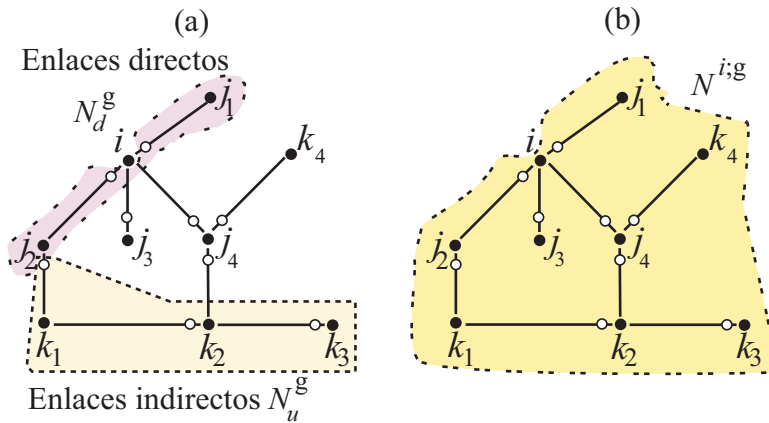


Figura 4. Estructura de conexiones e información accedida con flujo bidireccional

Una vez establecida la intuición, introducimos formalmente la *función de pagos* de cada agente i . Además de poseer una información propia, v_i , puede como vimos acceder a la información de otros por medio de una estructura de conexiones. Esto hace que el valor de la información total accedida por i , I_i , sea:

$$I_i(g) = v_i + \sum_{j \neq i | j \in g} I_j(N^{i,g}), \quad (2)$$

donde I_j es el valor de la información del agente j que es accedido por i a través del perfil de estrategias g la que se representa por $N^{i:g}$.

Para caracterizar la forma en que los agentes eligen sus estrategias, planteamos la interacción entre ellos en forma de un juego. La función de pagos o beneficios de i será $\Pi_i : G \rightarrow R$, definida como:

$$\Pi_i(g) \equiv I_i(g) - \sum_{j \in N^{i:g}} c \mu_j(g) \quad (3)$$

donde I_i representa la información accedida por el agente i según la estrategia de conexiones g mientras que c representa el costo de cada conexión, que para nuestro caso particular suponemos $c = 1$ y $\mu_j(g)$, tal como se definió en la sección anterior, la cantidad de enlaces directos e indirectos que debe pagar el agente j .

Veamos ahora un resultado simple pero útil:

Proposición 1. *Dadas dos estrategias conjuntas g y g' , $\Pi_i(g) \geq \Pi_i(g')$ si y solo si los correspondientes grafos $N^{i:g}$ y $N^{i:g'}$ son tales que:*

$$I_i(g) - I_i(g') \geq \mu_i(g) - \mu_i(g')$$

Prueba: Trivial. $\square$

Este resultado ayuda a comprender la intuición de que el objetivo del agente racional es el de obtener tanta información como sea posible atravesando la menor cantidad de enlaces posibles. Dos casos son de particular interés:

- $\sum_{j \in N^{i:g}} I_j = \sum_{j \in N^{i:g'}} I_j$ y $\mu_i(g) \leq \mu_i(g')$,
- $\sum_{j \in N^{i:g}} I_j \geq \sum_{j \in N^{i:g'}} I_j$ y $\mu_i(g) = \mu_i(g')$.

La primera nos muestra que $\Pi_i(g) \geq \Pi_i(g')$ si la información obtenida a través de g es la misma que la obtenida por g' pero el número de enlaces requeridos es menor en g que en g' . El segundo caso muestra que $\Pi_i(g) \geq \Pi_i(g')$ si el número de enlaces requeridos para alcanzar la información es la misma en g que en g' pero el monto de información obtenida en g es mayor que el monto obtenido en g' .

4. Equilibrio y optimalidad

Dada una red $g \in G$, sea g_{-i} el grafo dirigido obtenido cuando removemos todos los enlaces directos del agente i . Entonces, g puede ser escrito como $g = (g_i, g_{-i})$, indicando que g está formada por la unión de los enlaces de g_i y de g_{-i} . Una estrategia g_i se dice *mejor respuesta* del agente i a g_{-i} si

$$\Pi_i(g_i, g_{-i}) \geq \Pi_i(g'_i, g_{-i}) \quad (4)$$

para todo $g'_i \in G_i$.

El conjunto de mejores respuestas a g_{-i} es $MR_i(g_{-i})$. Una red $g = (g_1, \dots, g_n)$ se dice una *red de Nash* si para cada i , $g_i \in MR_i(g_{-i})$, es decir g (como una estrategia conjunta) es un equilibrio de Nash. Para determinar la estructura de las redes de Nash daremos algunas definiciones adicionales.

Dada una red g , un conjunto $C \subset N$ es llamado *componente* de g si para cada par de agentes i y j en C ($i \neq j$) tenemos que $j \in N^{i:g}$ y no existe un C' , $C \subset C'$, para el cual esto es cierto. Un componente C se dice *mínimo* si C no es más componente una vez que $g_{i,j} = 1$ entre dos agentes i y j en C es cortado, es decir que deja de ser un componente si $g_{i,j} = 0$. Vamos a definir también el concepto de nodo o jugador *activo* y *pasivo*: si i forma un enlace con j entonces i es un vecino activo de j ; si, adicionalmente, j no forma un enlace con i entonces j es un vecino pasivo de i . Es decir que el iniciador de un enlace es un vecino activo, mientras que si solamente es contactado por otro, se convierte en vecino pasivo de aquel.

Una red se dice *conectada* si soporta un único componente. Si ese único componente es mínimo g se dice *mínimamente conectada*. Una red no conectada se dice *desconectada*. Una instancia particular de las redes mínimamente conectadas es la red *de línea*, g^l de ahora en más, en la cual los agentes pueden ser etiquetados (por medio de una función $l: N \rightarrow N$) como $\{l(1), \dots, l(n)\}$ y $g_{l(1),l(2)} = g_{l(2),l(3)} = \dots = g_{l(n-1),l(n)} = 1$ y no hay otros enlaces. Dado que el flujo es bidireccional puede ocurrir que dentro de la red de línea los agentes inicien las conexiones de muchas diferentes maneras y aún así permitan el flujo de información a lo largo de la misma. Es decir, dentro de la red de línea existen distintas estructuras de activación que otorgan diferentes pagos a los agentes. La *red de línea con nodos de activación ordenados*³ mantiene una configuración de conexiones que hacen que el primero se conecte con el segundo, el segundo con el tercero y así hasta completar la secuencia siendo el anteúltimo que se conecta con el último y no hay más conexiones.

³ En algunos trabajos aparece mencionado esta topología como *red en cadena*. Por ejemplo Johnson y Gilles (2000)

Se pueden destacar otras formas de activación de la red de línea. Por ejemplo, la *red de línea con nodos activos impares*, g^{li} , es una topología lineal que puede ser representada por

$$g_{l(1),l(2)} = g_{l(3),l(2)} = g_{l(3),l(4)} = \dots = g_{l(n-3),l(n-4)} = g_{l(n-3),l(n-2)} = \dots = \begin{cases} g_{l(n-1),l(n)} = 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ g_{l(n),l(n-1)} = 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

es decir los nodos impares inician un enlace con sus predecesores y sucesores inmediatos, mientras que los pares pasivamente aceptan hasta completar la secuencia de conexión. Análogamente, la *red de línea con nodos activos pares*, g^{lp} , es aquella que cumple con la configuración

$$g_{l(2),l(1)} = g_{l(2),l(3)} = g_{l(4),l(3)} = \dots = g_{l(n-3),l(n-2)} = g_{l(n-1),l(n-2)} = \dots = \begin{cases} g_{l(n),l(n-1)} = 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ g_{l(n-1),l(n)} = 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

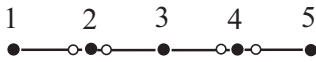
es decir que los nodos etiquetados como pares inician las conexiones hacia sus nodos inmediatamente vecinos mientras que el resto de nodos actúan pasivamente (no inician ellos la conexión). La Figura 5 muestra ejemplos con cinco agentes para cada uno de los casos descriptos.

Figura 5. Diferentes topologías de redes de línea de conexión secuencial

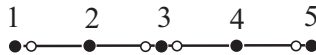
a.1 Redes de línea con conexión ordenada



a.2 Red de línea con nodos pares activos



a.3 Red de línea con nodos impares activos



Entonces, con todos estos elementos en la mano y por la Proposición 1, podemos establecer el siguiente resultado para el juego $\langle N, G, \Pi \rangle$, donde

$$\Pi = \Pi_1 \times \dots \times \Pi_n :$$

Lema 1: Dada las funciones de pagos en (3), una red de línea de conexión secuencial con nodos pares o impares activos g^* es una red estricta de Nash.

Prueba: Consideremos a $\Pi_i : G \rightarrow Z$, para cada $i \in N$ y una red de conexión secuencial con nodos pares o impares activos, $g^* \in G$. Queremos ver que es un equilibrio de Nash estricto. Esto significa que el pago bajo g^* es estrictamente mejor, para cada agente, que una desviación unilateral. Entonces, para cada i y cada $g_i \in G_i$, tenemos que:

$$\Pi_i(g_i^*, g_{-i}^*) > \Pi_i(g_i, g_{-i}^*) \quad (3)$$

Dado que g^* constituye una red de línea de conexión secuencial debe darse, para todo agente i , que:

$$\begin{cases} \Pi_i(g) \equiv \sum_{i \in N} I_i - 2, & \text{si } i \text{ es activo,} \\ \Pi_i(g) \equiv \sum_{i \in N} I_i - 1, & \text{si } i \text{ es el último agente y} \\ \Pi_i(g) \equiv \sum_{i \in N} I_i, & \text{si } i \text{ es pasivo.} \end{cases}$$

En palabras: el máximo de información que puede ser alcanzado en una red de línea de conexión secuencial es la suma de todas las informaciones poseídas por todos los agentes mientras que el número de enlaces que permitirían hacer disponible la información a cualquiera de ellos es estrictamente positiva pero baja para los nodos activos, casi la mitad de los conectados, y nula para los nodos pasivos (la otra casi mitad de los conectados).

Veamos que toda desviación unilateral resulta en un pago estrictamente menor para el agente que se desvía. Supongamos por contradicción que g^ no es un equilibrio estricto de Nash. Mostraremos entonces que no constituye una red de línea de conexión secuencial⁴. Esto significa que para algún agente i ,*

$$\begin{cases} \Pi_i(g) \geq \sum_{i \in N} I_i - 2, & \text{si } i \text{ es activo o} \\ \Pi_i(g) \geq \sum_{i \in N} I_i - 1, & \text{si } i \text{ es el último agente o} \\ \Pi_i(g) \geq \sum_{i \in N} I_i, & \text{si } i \text{ es pasivo.} \end{cases}$$

1. *Consideremos primero el caso de un agente activo para quien pudiera existir una estrategia de desvío tal que: $\Pi_i(g^*) \geq \sum_{i \in N} I_i - 2$. El acceso a mayor información no puede ser mejorado, dado que en realidad i accede a toda la información disponible en la red, por lo que una estrategia que mejore los pagos debe prescribir la disminución del número de conexiones. Si i optará por conectarse con sólo la agente $k+1$ (predecesora) o sólo con $k-1$ (antecesora) anularía la conectividad de la red desconectando en dos subredes a la misma. Con ello se accedería a un nivel de información menor que $\sum_{i \in N} I_i$ habiéndose ahorrado sólo una unidad de utilidad en costos de conexión. Por otro lado, si i decidiera conectarse con otras agentes ubicadas en $k \pm j$ tal que $2 \leq j \leq n-j$, entonces dejaría aislados a los agentes intermedios $k \pm k'$ con $k' < j$. Nuevamente, perdería el acceso a información más valiosa que el beneficio de disminuir los costos de conexión respectivos. Contradicción.*

⁴ Para la demostración no importa necesariamente si es una red de nodos activos pares o impares dado que con modificaciones triviales se obtiene el mismo resultado.

2. Analicemos el caso que i sea el último agente. Si es así, la única manera de desviarse sería cortar su único enlace con el resto de la red. Pero ahorraría una unidad perdiendo toda la información excepto la propia. Contradicción.
3. Consideremos ahora el caso de un i pasivo. Veamos si existe una estrategia g^* tal que $\Pi_i(g^*) \geq \sum_{i \in N} I_i$. Dado que i accede a toda la información sin tener que hacer pago alguno, cualquier desviación le haría incurrir en un costo, lo que le haría disminuir su beneficio. Contradicción. $\square$

Nótese que la conversa no es cierta, como lo muestra el siguiente ejemplo:

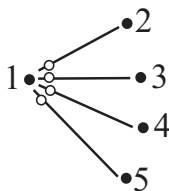
Ejemplo 3. Supongamos que tenemos $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y la estrategia $g = \langle g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 \rangle$ esta dada por la Tabla 3.

Tabla 3. Perfil de estrategias para el Ejemplo 3

Estrategia	1	2	3	4	5
g_1	X	1*	1*	1*	1*
g_2	0	X	0	0	0
g_3	0	0	X	0	0
g_4	0	0	0	X	0
g_5	0	0	0	0	X

En este caso lo que tenemos es que existe un agente, el 1, que tiene una estrategia g_1 que consiste en conectarse con todos los demás mientras que el resto no realiza ninguna conexión. Este tipo de estructura de conexión se denomina red de estrella centralmente sostenida y el grafo de activación de la red se puede observar en la Figura 6.

Figura 6. Red de estrella centralmente sostenida



Si se analiza, esta red es una red de Nash estricta. Cualquier desvío implica pérdidas para el agente que incurra en él. Sin embargo esta red presenta una asimetría enorme: un solo agente activo sostiene toda la red mientras el resto se comporta pasivamente sin incurrir en costos. El agente central obtiene un beneficio $\Pi_1(g) = \sum_{i \in N} I_i - (n-1)$ mientras que el resto no paga nada y recibe toda la información.

Falk y Kosfeld (2003) encuentran en experimentos de formación de redes que para el caso del modelo de Bala y Goyal (2000), donde los costos no son acumulativos sino que sólo se pagan los costos de enlaces directos, nunca surge en equilibrio una topología de red de estrella centralmente sostenida. Los autores destacan que la alta asimetría de pagos a la que es sometido el agente central, así como un problema más grande coordinación general, hace inviable que algún sujeto de experimento asuma dicho rol. Berninghaus y otros (2004) definen a esta conducta como aversión a la desigualdad, cuya modelación exige considerar ciertos aspectos cualitativos a la hora de formar enlaces. Estos autores consideran que los agentes activos, contrariamente a lo que ocurre en nuestro modelo, poseen mayores privilegios de información que los pasivos (es decir, quien crea un enlace accede al agente y su red de contactos mientras que quien se deja acceder sólo accede al agente). Bajo este supuesto obtienen en experimentos con flujo bidireccional de información un equilibrio consistente en una red periféricamente sostenida.⁵ Dado que no seguimos esta línea de explicación, descartamos esa topología como caso de interés.

Si g^* es un equilibrio de Nash con el mínimo número de enlaces entonces constituye un único componente que incluye todos los agentes en N dado que de otro modo la información de los agentes que no son accedidos se perderá para al menos algún otro agente, mientras que la reducción en los costos de los enlaces no será lo suficiente como para compensar dicha pérdida. Recuerdese que cada I_i es mayor que el costo de un enlace.

De acuerdo al Lema 1 un resultado estable en la interacción estratégica de agentes es la red lineal secuencial con nodos activos pares o impares. Afirmamos que ésta es estable porque no hay incentivos, una vez que se establece la estructura de la red, para cortar los enlaces o formar nuevos, porque la nueva configuración no puede otorgar pagos mejores a los agentes que se desvíen. El argumento hace surgir la pregunta sobre la optimalidad del resultado. Esto es, ¿hay otra configuración que pueda asegurar mejores pagos a los agentes? Antes de responder negativamente esta pregunta, introduciremos dos nociones diferentes de optimalidad. Una representa el *bienestar social* proporcionado por la red. Formalmente, sea $W : G \rightarrow Z$ definida como $W(g) = \sum_{i=1}^n \Pi_i(g)$ para $g \in G$. Una red se dice *eficiente* si $W(g) \geq W(g')$ para todo $g' \in G$.

Por otro lado, tenemos la noción de optimalidad de Pareto. Una red g se dice *óptima de Pareto* si no existe otra red g' tal que para cada $i \in N$, $\Pi_i(g') \geq \Pi_i(g)$ y para al menos un i , $\Pi_i(g') > \Pi_i(g)$.

⁵ La red periféricamente sostenida es la inversa de la red centralmente sostenida. En ésta, todos los agentes menos el propio agente central inician enlaces únicamente con el agente central. La asimetría comparada con el caso anterior, se reduce notablemente, dado que hay ahora $n-1$ agentes activos y sólo uno pasivo.

Tenemos entonces el siguiente resultado:

Proposición 2. Una red de línea secuencial con activación de nodos de pares o impares es tanto eficiente como óptima de Pareto.

Prueba. De acuerdo a la Proposición 1, una red g^* secuencial con activación de nodos pares o impares constituye un equilibrio estricto de Nash, y en la demostración vimos que el máximo pago para cada agente es, $\Pi_i(g^*) = \sum_{i \in N} I_i(g) - 2$ si i es activo, $\Pi_i(g^*) = \sum_{i \in N} I_i(g) - 1$ si i es el último conectado y $\Pi_i(g^*) = \sum_{i \in N} I_i(g)$ si i es pasivo. Más aún, $\Pi_i(g^*) \geq \Pi_i(g)$ para cada $i \in N$ y cada $g \in G$. De este modo, g^* es óptima en el sentido de Pareto. Con el mismo razonamiento, $W(g^*) = \sum_{i \in N} \Pi_i(g^*) \geq \sum_{i \in N} \Pi_i(g) = W(g)$, para cada $g \in G$. Esto es, g^* es eficiente. $\square$

En la Tabla 4, a continuación, se reporta el beneficio social neto de diferentes configuraciones de red bajo información bidireccional. Todas las redes lineales en secuencia con nodos de activación pares o impares comparten el máximo beneficio junto con la red de estrella centralmente sostenida. Sin embargo como ya se mencionó, dicha configuración no cumple con un criterio de simetría que en cambio es verificado por las configuraciones lineales.

Tabla 4. Cálculo de pagos por topología

Topología	Beneficio social neto (Π_i)	
1) Red de estrella centralmente sostenida	$\underbrace{\left(\sum_{i \in g} I_i - (n-1)\right)}_{\text{Centro de estrella}} + \underbrace{(n-1)\sum_{i \in g} I_i}_{\text{Nodos periféricos}} =$	$n\left(\sum_{i \in g} I_i - 1\right) + 1$
2) Redes de línea secuenciales		
2.a) Red de línea con nodos de activación ordenados	$\sum_{i=1}^n I_i - (n-i) =$	$\frac{1}{2}n\left(2\sum_{i=1}^n I_i + 1\right) - \frac{1}{2}n^2$
2.a) Red de línea con nodos de activación impares	n par : $\underbrace{\left(\sum_{i \in g} I_i - 1\right)}_{\text{Nodo inicial}} + \underbrace{\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\sum_{i \in g} I_i - 2\right)}_{\text{Resto de nodos impares}} + \underbrace{\frac{n}{2}\left(\sum_{i \in g} I_i\right)}_{\text{Nodos pares}} =$	$n\left(\sum_{i \in g} I_i - 1\right) + 1$
	n impar : $\underbrace{\left(\sum_{i \in g} I_i - 1\right)}_{\text{Nodo inicial}} + \underbrace{\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\sum_{i \in g} I_i - 2\right)}_{\text{Resto de nodos impares}} + \underbrace{\frac{n}{2}\left(\sum_{i \in g} I_i\right)}_{\text{Nodos pares}} =$	$n\left(\sum_{i \in g} I_i - 1\right) + 1$
3.b) Red de línea con nodos de activación pares	n par : $\underbrace{\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\sum_{i \in g} I_i - 2\right)}_{\text{Nodos pares menos nodo final}} + \underbrace{\frac{n}{2}\left(\sum_{i \in g} I_i\right)}_{\text{Nodos impares}} + \underbrace{\left(\sum_{i \in g} I_i - 1\right)}_{\text{Nodo final}} =$	$n\left(\sum_{i \in g} I_i - 1\right) + 1$
	n impar : $\underbrace{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\sum_{i \in g} I_i - 2\right)}_{\text{Nodos pares}} + \underbrace{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\sum_{i \in g} I_i\right)}_{\text{Nodos impares}} =$	$n\left(\sum_{i \in g} I_i - 1\right) + 1$

El grado de asimetría de la red puede caracterizarse por medio de la diferencia entre los pagos máximos y mínimos en equilibrio. Esto es, si $\bar{\Pi}$ es $\max_i \Pi_i(g^*)$, mientras que $\underline{\Pi}$ es $\min_i \Pi_i(g^*)$, el grado de asimetría es $\bar{\Pi} - \underline{\Pi}$ si g^* es un equilibrio. Tenemos entonces el siguiente resultado

Lema 2. *Una red g^* tiene estructura de línea secuencial con activación de nodos de pares o impares sí y sólo sí g^* es un equilibrio estricto de Nash, óptimo y eficiente, con mínimo grado de asimetría.*

Prueba. *Inmediato del Lema 1.*

Por un corolario de (Larrosa y Tohmé, 2003) una red estricta de Nash con flujo bidireccional tiene exactamente $n - 1$ enlaces y permite el acceso a todos los nodos. Sólo dos estructuras verifican estas propiedades: las redes de línea y las redes de estrella centralmente sostenidas. Dado que g^ es además eficiente, como se ve en la Tabla 4 no puede ser una red con nodos de activación ordenados. Por lo tanto o los nodos de activación son intermedios, o es una red de estrella centralmente sostenida. Pero en este último caso, el grado de asimetría es $(n - 1)$, mientras que en los casos anteriores es 2. Por lo tanto g^* es de línea con nodos de activación intermedios. $\square$*

5. Conclusiones

La forma de la función de costos evidentemente determina el conjunto de topologías que pueden surgir como equilibrios estrictos de Nash. Adicionalmente determina las topologías que verifican eficiencia y optimalidad Paretiana. En el caso de flujo de información bidireccional hay dos casos paradigmáticos: el de las redes secuenciales con nodos activadores pares o impares y el de la red de estrella centralmente sostenida. Esta última muestra una asimetría mucho mayor que las anteriores, por lo que resulta esperable que en la realidad no se observe con frecuencia. En cambio, la red lineal secuencial con nodos de activación pares o impares, donde agentes intermedios realizan conexiones con sus dos vecinos inmediatos es una estructura estable, eficiente, óptima y más simétrica.

Como futuras extensiones al trabajo pueden mencionarse, interesantemente, la sugerencia de Berninghaus y otros (2004), tomada por Goyal (2004), quienes sugiere cualificar los enlaces de modo de valorar más la creación de enlaces que mantener una actitud pasiva de dejarse conectar. Esta sugerencia, podría arrojar una topología más amplia como equilibrio estricto de Nash para los modelos mono y bidireccional.

Referencias

- Berninghaus, S.K., M. Ott y B. Vogt (2004). "On networks and 'stars' - Recent results in network experiments". Manuscrito. University of Karlsruhe.
- Bala, V. y S. Goyal (2000). "A Noncooperative Model of Network Formation". *Econometrica* **68**: 1181-1229.
- Dutta, B., A. van den Nouweland y S. Tijs (1998). "Link Formation in Cooperative Situations". *International Journal of Game Theory* **27**: 245-255.
- Falk, A. y M. Kosfeld (2003). "It's all about connections: Evidence on network formation". IEW Working Paper 21, Universität Zurich.
- Goyal, S. (2004). "Strong and weak links". Manuscrito. Queen Mary University, Londres.
- Johnson, C.A. y R.P. Gilles (2000). "Spatial Social Networks". *Review of Economic Design* **5**: 273-299.
- Jackson, M. y A. Wolinsky (1996), "A Strategic Model of Social and Economic Networks", *Journal of Economic Theory* **71**: 44-74.
- Larrosa, J.M.C. y F. Tohmé (2003). "Formación de redes dirigidas circulares con costos de enlace compartidos". *Estudios Económicos XX* (**41**). Enero-Diciembre: 27-48.
- Qin, C.Z. (1996), "Endogenous Formation of Cooperative Structures", *Journal of Economic Theory* **69**: 218-226.
- Slikker, M., R. Gilles, H. Norde y S. Tijs (2002), "Directed Networks, Allocation Properties and Hierarchy Formation". Manuscrito. Center of Economic Research, University of Tilburg.
- Slikker, M. y A. van den Nouweland (2001), "A One-Stage Model of Link Formation and Payoff Division", *Games and Economic Behavior* **34**: 153-175.