

# 1 Introducción

Uno de los problemas más nuevos que ha abordado la teoría económica es el de la *computabilidad* de los procesos de decisión de los agentes económicos [Rusteni-Velupillai 90]. Este problema va asociado con la cuestión de qué tipo de representación de conocimiento es la que utilizan los agentes en dichos procesos. Obviamente este tipo de planteos está motivado por el desarrollo de la ciencia de la computación y a ella recurriremos para proveer respuestas dentro de un marco en que los agentes ordenan parcialmente sus preferencias y utilizan conocimiento acerca de los posibles comportamientos de los demás para tomar decisiones. El marco de análisis completo puede verse en [Tohmé 94]. Una breve recapitulación de los puntos principales en el esquema de razonamiento desarrollado en dicho trabajo resulta apropiada para lo que sigue:

- los agentes económicos son racionales
- la racionalidad se define mediante ordenamientos preferenciales parciales
- las funciones de utilidad que se derivan no son cuasiconcavas
- los agentes pueden obtener varias canastas maximalmente preferidas
- los agentes tienen correspondencias de demanda monótonas
- los agentes definen una función de utilidad de segundo orden, que incorpora el conocimiento perfecto de las canastas maximales de los otros agentes
- existe un equilibrio de Nash en el conjunto de las elecciones individuales que constituye una asignación de equilibrio de segundo orden
- si los agentes siguen una regla de cooperación condicional, tienen conocimiento común de las probabilidades de comportamientos individuales, y existe alguna asignación elegida que sea factible entonces existe un equilibrio de segundo orden

- si el equilibrio de Nash es Pareto-mejorado por otra asignación factible y esta es la más probable entre las Pareto-mejoradoras, la cooperación condicional modificada asegura que el equilibrio de segundo orden se alcance en dicha asignación
- existe un sistema de precios que asegura la existencia de opciones preferidas factibles y por lo tanto la validez de los dos resultados anteriores

Muchos de estos resultados dependen fuertemente de los supuestos acerca de la información que manejan los consumidores en una economía pura de intercambio en la que sus preferencias se ordenan parcialmente. Evidentemente el grado de conocimiento que se exige que los consumidores tengan de la economía requiere una ampliación de la definición de agente económico:

**Definición 1** *Un agente económico  $i$  se dice metarracional si*

1. *su ordenamiento de preferencias  $\prec$  es parcial, del cual se deriva una función de utilidad  $U_i$ ; no necesariamente cuasicóncava y determina sus canastas más preferidas maximizando la utilidad en su conjunto presupuestario*
2. *la correspondencia de demanda que deriva es monótonamente decreciente en los precios*
3. *conoce las preferencias y las dotaciones de todos los demás agentes*
4. *en consecuencia puede derivar una función de utilidad de segundo orden,  $U'_i$ , a partir de la función de utilidad original:*

$$U'_i(x) = \begin{cases} U_i(x_i) & \text{si } \sum_{i=1}^n x_i \leq w \\ -\infty & \text{si no} \end{cases}$$

*donde  $x$  es una asignación de recursos en la economía*

5. *conoce  $\text{prob}(x_j)$ ,  $\text{prob}(x_k|x_j)$ , para cualesquiera agentes  $j, k$  en la economía*

6. sigue la regla de cooperación condicional modificada, es decir que elige la demanda  $x_i$  que hace máxima la probabilidad conjunta  $\text{prob}(x_1 \wedge \dots \wedge x_i \wedge \dots \wedge x_n)$  correspondiente a la asignación Pareto-optimal  $(x_1, \dots, x_n)$

## 2 Niveles de información

Los puntos 3, 4, 5 y 6 de la última definición muestran la importancia que tiene el conocimiento del comportamiento global de la economía en la toma de decisiones de cada agente metarracional. Se puede caracterizar al conjunto de información de un agente  $i$  mediante una correspondencia informacional:

**Definición 2** Dado un agente metarracional  $i$  y la economía pura de intercambio en la que actúa  $\epsilon = ((X_j, U_j, w_j, \Lambda_j)_{j=1}^n, w)$ , donde las  $U_j$  son funciones de utilidad que representan ordenamientos parciales, el conjunto  $\Lambda_i$  es:  $\Lambda_i(\epsilon) = \{\{x^{01}(p), \dots, x^{0n}(p)\}_{p \in S^*}; \text{prob}_i\}$ , donde  $x^{0j} \in \prod_{k=1}^n S_k(p)$  son las posibles asignaciones que provienen de la maximización de las preferencias individuales al sistema de precios  $p$  y  $\text{prob}_i$  es la distribución de creencias racionales de  $i$  definida sobre el conjunto  $\cup_{k=1}^n S_k(p)$

Esta correspondencia, junto con sus preferencias individuales determina la elección individual del agente metarracional cuando al sistema de precios  $p$  existe una asignación factible:

**Definición 3** La demanda de  $i$  se representa mediante una función parcial  $x_i^0 : \Lambda_i(\epsilon) \times S^* \rightarrow \cup_{p \in S^*} S_i(p)$  tal que la asignación  $x^0(p) = (x_1^0(p), \dots, x_i^0(p), \dots, x_n^0(p))$  es un equilibrio de segundo orden para el sistema de precios  $p$ . Cuando no hay ninguna asignación factible a un sistema de precios dado no se deriva ninguna demanda.

De esta manera, el conjunto de agentes metarracionales determina la asignación de equilibrio que resulta demandada:

**Definición 4** El equilibrio de segundo orden de  $\epsilon$  se representa mediante una función parcial  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) : \prod_i \Lambda_i(\epsilon) \times S^* \rightarrow \cup_{p \in S^*} \{\prod_{i=1}^n S_i(p)\}_p$  donde cada  $x_i^0$  es la demanda del agente metarracional  $i$  al sistema de precios  $p$

Notemos que existe una recursividad en la definiciones anteriores en cuanto a que la demanda individual se define en términos del equilibrio de segundo orden, mientras que este último se define en términos de las demandas individuales. Vale la siguiente proposición:

**Proposición 1** *Sea  $p$  un sistema de precios al que existe una asignación factible entonces:  $\exists \lambda(p) : \cup_{p \in S^*} \{\prod_{i=1}^n S_i(p)\}_p \rightarrow \prod_i \Lambda_i(\varepsilon) \times S^c$  tal que  $x^0 \circ \lambda(p) \equiv Id_{Equi(p)}$  donde  $Id_X$  es la identidad sobre el conjunto  $X$  y  $Equi(p)$  el conjunto de equilibrios de segundo orden.*

**Demostración 1** *Trivial, ya que dado  $p$  y un equilibrio de segundo orden  $x^*$ , como las creencias racionales son comunes a todos, se puede fijar en  $\Lambda_i(\varepsilon)$  un elemento que es el mismo para todo  $i$  al que se denomina  $\lambda(p)$  que, lo tanto también pertenece a  $\prod_i \Lambda_i(\varepsilon) \times S^c$ . Es inmediato que la función  $x^0$  recupera de la imagen de  $\lambda$ , el equilibrio de segundo orden.*

En este contexto resulta aceptable plantear una jerarquización en dos niveles de las expresiones utilizadas en el razonamiento anterior, en una forma similar a la que se utiliza en la distinción entre *lenguaje objeto* y *metalenguaje* [Stigum 91]. Un antecedente de la siguiente diferenciación puede encontrarse en la distinción entre *espacio de resultados* y *espacio de mensajes* [Reiter 77]:

**Definición 5** • los elementos del conjunto  $\cup_{p \in S^*} \{\prod_{i=1}^n S_i(p)\}_p$  constituyen el Nivel<sub>0</sub>

• los elementos del conjunto  $\prod_i \Lambda_i(\varepsilon) \times S^c$  constituyen el Nivel<sub>1</sub>

**Observación 1** *El simplex de precios positivos  $S^c$  es incluido en el Nivel<sub>1</sub> pues los precios proveen información para la toma de decisiones de los agentes económicos. Más aún, en el caso de que las funciones de utilidad sean cuasiconcavas,  $\Lambda_i(\varepsilon) \equiv S^c$  para todo  $i$*

La determinación del equilibrio de segundo orden (un elemento del Nivel<sub>0</sub>) se da mediante una *autorreferencia*, en el sentido que el propio equilibrio se obtiene a partir de un conjunto de información que a su vez se obtiene necesariamente del equilibrio de segundo orden. Más precisamente vale que:

**Proposición 2** *Un equilibrio de segundo orden  $x^*$  se obtiene como punto fijo de la relación circular  $Nivel_0 \rightsquigarrow Nivel_1 \rightsquigarrow Nivel_0$  (donde  $X \rightsquigarrow Y$  indica la existencia de una función  $f: X \rightarrow Y$ )*

**Demostración 2** *Por la Proposición 8 las funciones  $x^0, \lambda(p)$  son tales que  $Nivel_0 \xrightarrow{\lambda(p)} Nivel_1 \xrightarrow{x^0} Nivel_0$ , de manera que si  $x^*(p)$  es un equilibrio de segundo orden  $x^0 \circ \lambda(p)_{(x^*(p))} = x^*(p)$*

Esta autorreferencia no es problemática, ya que funciona como una "profección autorrealizada". Esto resulta similar al hecho de que no hay ninguna *Paradoja del Veraz* que sea problemática para la semántica del lenguaje natural. Más aún, en una forma análoga a la que se demuestra el teorema de Gödel se prueba la demostrabilidad de un enunciado equivalente al hecho de que existe una demostración de sí mismo [Henkin 49]. Lo que en definitiva importa es que los equilibrios de segundo orden se determinan, en un contexto donde todos los agentes son metarracionales, por la interacción entre el *Nivel<sub>0</sub>* y el *Nivel<sub>1</sub>*. Nótese que esta interacción es instantánea, lo que hace diferente a este planteo del de la existencia de *Equilibrio de Expectativas Racionales* (en el que los resultados coinciden con los que los agentes creían que se iban a dar) que se obtiene en un contexto dinámico y en el que no toda la información relevante está disponible a los agentes [Radner 82, Grandmont 82].

### 3 Autómatas metarracionales

Para completar el análisis de la sección anterior, dado que el problema de la obtención de un equilibrio de segundo orden se puede resolver en forma consistente, falta ver si la solución es computable. Es decir, hay que ver si la solución puede darse en términos de procedimientos efectivos.

En primer lugar, es necesario justificar la afirmación anterior de que las demandas que efectivamente se dan en un equilibrio de segundo orden constituyen *funciones recursivas parciales*. Si es así, serán computables, según la bien conocida Tesis de Church-Turing [Eilenberg 74]. Decir que es una demanda individual es una función significa que hay un único elemento en su imagen para cada elemento del dominio. Esto es válido ya que aquí hablamos de las elecciones que efectivamente se toman y es evidente que

un agente debe elegir una sola de las opciones posibles. Además, como el método para llevar a cabo las elecciones involucra secuencias de operaciones bien definidas como maximización local de funciones continuas, comparaciones entre vectores reales, etc. [Stigum 91], es claro que  $z_i^0$  está bien definido como un procedimiento constructivo si suponemos que las operaciones se efectúan, no sobre el anillo de los enteros  $Z$  sino sobre el anillo (conmutativo y con unidad) de los reales  $R$  (ver [Blum-Shub-Smale 89] para una discusión de la extensión de la noción de computabilidad a este dominio).

Un procedimiento constructivo puede caracterizarse como una máquina de Turing de Alto Nivel (MTAN), enumerando sus componentes:

- un conjunto de expresiones de entrada-salida  $IO$
- un conjunto finito de operaciones en memoria  $M$
- un conjunto finito de estados internos  $K$
- un estado inicial  $q_0 \in K$
- un conjunto de estados finales  $F \subseteq K$
- una función de transición de estado  $\delta : K \times IO \rightarrow K \times M \times IO$

**Observación 2** *Los elementos de  $IO$ , con los que opera la máquina son son polinomios definidos sobre un anillo conmutativo con unidad. La definición tradicional de máquina de Turing reemplaza el conjunto  $IO$  por un conjunto finito de símbolos elementales. Esto significa que el tipo de máquina de Turing definido anteriormente puede reducirse a un conjunto de máquinas definidas como es usual. La cardinalidad del conjunto  $IO$  depende del anillo sobre el que se definan todas las operaciones elementales. Si, como es usual, se define sobre  $Z$ , será numerable. En nuestro caso nos interesa el anillo de los reales, por lo que  $IO$  no será numerable.*

En términos generales, una MTAN puede verse como un procesador operando sobre una estructura de memoria. Dependiendo de los datos que obtiene de la memoria y de su estado interno, se desplazará dentro de la memoria, almacenará (o eliminará) un dato en ella y cambiará su estado

interno. Empieza a trabajar en su estado inicial hasta que alcanza uno final.

Si representamos a un consumidor meta-racional como una MTAN, las equivalencias son las siguientes (con la salvedad de que todos los elementos que caracterizan al consumidor y a su conocimiento pueden verse como vectores de componentes reales):

- $IO \subseteq \varepsilon \times S^c$
- $M$  es el conjunto de operaciones de almacenamiento y búsqueda en memoria que puede llevar a cabo el consumidor (en una base de datos común a todos los agentes) para obtener la información que necesita
- $K$  es el conjunto de instancias de decisión que enfrenta el consumidor
- $q_0$  es la instancia en que se plantea el problema de elegir una canasta
- $F$  es el conjunto de instancias posibles en la que el consumidor sabe que ha resuelto su problema
- $\delta$  es el programa de actividades que el consumidor sigue hasta resolver su problema

El programa  $\delta$  implementa en forma de operaciones formales todos los pasos que sigue el consumidor para resolver su problema:

**Definición 6** • *Paso 1: Cálculo de los elementos máximos de las  $\{U_i\}$  a los precios  $p$ . Se obtienen los conjuntos  $\{S_i\}$*

- *Paso 2: Asignación de valores de utilidad de segundo orden a los elementos de  $\prod_i S_i$*
- *Paso 3:*  
*Si existen elementos con utilidad de segundo orden positiva en  $\prod_i S_i$  entonces asignarles probabilidades conjuntas sino Paso 5*
- *Paso 4: Elección del elemento de  $\prod_i S_i$  con mayor probabilidad conjunta*
- *Paso 5: Fin*

Se supone que no hay limitaciones físicas para el acceso a cualquier localización de memoria, de manera que todos los agentes pueden obtener la misma información al mismo tiempo. Resulta entonces obvio que el conjunto de consumidores se comporta como una red de MTANs. La solución al problema global se obtiene cuando todas las máquinas alcanzan un estado final atravesando el Paso 4 del algoritmo anterior. Dado que las funciones son parciales puede haber casos en que no se obtiene ningún resultado, debido al hecho de que el sistema de precios no es de equilibrio. Por lo tanto debe considerarse otra máquina, que opere a partir de la información depositada en la memoria por las otras máquinas (calculando el exceso de demanda), modificando los precios y enviando esa información de vuelta a las  $n$  otras máquinas. El estado final de esta máquina adicional se obtiene cuando encuentra un exceso de demanda no positivo.

Aunque correcto, el escenario descrito no difiere en su formulación de una red de máquinas de Turing que representen a consumidores tradicionales, con ordenamientos débiles de preferencias y la única información común entre los agentes está dada por los precios. Por lo tanto, no queda representado fielmente el hecho de que los agentes metarracionales operan en dos niveles de información.

Para proveer una representación más fiel de un agente metarracional definiremos una leve modificación de la noción de MTAN, a la que se denominará *autómata de dos niveles*:

**Definición 7** *Un autómata de dos niveles se define mediante la  $n$ -upla  $(IO_1, IO_2, M, K_1, K_2, \delta_1, \delta_2, q_0, F_1, F_2)$  donde:*

- $IO_1$  es un conjunto de expresiones de entrada-salida
- $IO_2$  es otro conjunto de expresiones de entrada-salida ( $IO_1 \subseteq IO_2$ )
- $M$  es un conjunto finito de operaciones de memoria
- $K_1$  es un conjunto finito de estados internos
- $K_2$  es otro conjunto finito de estados internos
- $\delta_1 : IO_1 \times K_1 \rightarrow K_1 \times M \times IO_1$  es una función de transición de estados
- $\delta_2 : IO_2 \times K_2 \rightarrow K_2 \times M \times IO_2$  es otra función de transición de estados

- $q_0^1$  es el estado inicial en  $K_1$
- $F_1 \subset K_1 \cap K_2$  es el conjunto de estados finales en la etapa 1 y estados iniciales en la etapa 2
- $F_2 \subset K_2$  es el conjunto de estados finales

Un autómata de dos niveles lleva a cabo una tarea en dos etapas diferenciadas, siendo los resultados de la primera etapa algunos de los inputs para la segunda etapa, a la vez que los estados finales de la primera etapa activan a la segunda. Vale que:

**Proposición 3** *Un automata de dos niveles tiene el mismo poder expresivo que una MTAN*

**Demostración 3** *Trivial, dado que un autómata de dos niveles puede reducirse a una MTAN mediante estas equivalencias:*

- $IO = IO_2$
- $K = K_1 \cup K_2$
- $\delta \equiv \delta_2 \circ \delta_1$
- $q_0 = q_0^1$
- $F \equiv F_2$

Por lo tanto, la única ventaja de considerar este tipo de máquinas es que permiten expresar en forma clara la distinción de niveles, que quedaría oculta en una MTAN convencional, sin necesidad de recurrir a la representación mediante dos máquinas de Turing asociadas, una para cada nivel. Es decir, hay un programa de nivel 1 (dado por  $\delta_1$ ) tal que después de su finalización comienza a operar un programa  $\delta_2$  tomando como parte de sus entradas a las salidas del programa anterior. Resulta inmediata la siguiente caracterización de un consumidor metarracional como un autómata de dos niveles:

**Definición 8** *Un consumidor metarracional i puede representarse mediante el autómata de dos niveles  $C_i = (IO_1, IO_2, K_1, K_2, M, \delta_1, \delta_2, q_0^1, F_1, F_2)$  donde:*

- $IO_1 = \{(U_i, X_i, w_i), p\}$
- $IO_2 = \{e, \{prob_i\}_{i=1}^n, p\}$
- $K_1 = \{ \text{estados internos correspondientes al cálculo que hace } i \text{ de las elecciones maximales de "primer orden"} \}$
- $q_0^1$  es el estado interno que indica la disposición a resolver el problema de elección
- $K_2 = \{ \text{estados internos correspondientes a la evaluación de las elecciones maximales de "segundo orden"} \}$
- $F_1 = \{ \text{estados finales para el problema de primer orden} \}$
- $F_2 = \{ \text{estados finales para el problema de segundo orden} \}$
- $\delta_1$  es el procedimiento de cálculo de elecciones maximales (el Paso 1 del algoritmo  $\delta$  aplicado sólo a  $U_i$ )
- $\delta_2$  es el procedimiento de cálculo de elecciones de segundo orden, i.e., el resto del algoritmo  $\delta$ , con el Paso 1 reemplazado por:
  - Paso 1': Cálculo de los maximales de las utilidades  $\{U_j\}_{j \neq i}$  a los precios  $p$ . Se obtienen los conjuntos  $\{S_j\}_{j \neq i}$
  - Paso 1'': Entrada del resultado de  $\delta_1$  (más los datos obtenidos en el Paso 1'). Se obtiene el conjunto  $S_i$

Suponemos, sin mayor pérdida de generalidad, que los  $n$  autómatas operan sobre la misma estructura de memoria, por lo que no es necesario repetir el mismo proceso de maximización para cada uno de los autómatas. Es suficiente que cada autómata encuentre los maximales de la función de utilidad que le corresponde. Como las  $U_i$  son continuas (no necesariamente diferenciables) Los conjuntos  $\{prob_i\}$  vienen dados exógenamente, de manera que sólo se requiere la determinación, para cada sistema de precios, de valores de probabilidad (consistentes) a los elementos maximales. Notemos que si a un precio no existe asignación factible alguna los autómatas no proveen respuesta. Por lo tanto  $F_2^1$  debe ser particionado en un subconjunto "exitoso"  $F_{2,1}^1$  (llegada al Paso 5 a través del Paso 4 en  $\delta_2$ ) y en un subconjunto "infructuoso"  $F_{2,0}^1$  (llegada al Paso 5 sin pasar por el Paso 4).

Para representar plenamente a la economía  $\varepsilon$  agreguemos otro autómata, una MTAN corriente,  $A$  :

**Definición 9** El autómata  $A$  viene dado por  $(IO, K, M, q_0, F, \delta)$  donde:

- $IO = \{\{F_2^i\}_{i=1}^n \times \{IO_2^i\}_{i=1}^n \times S^e\}$
- $K = \{ \text{estados internos correspondientes al cálculo de un sistema de precios de equilibrio} \}$
- $q_0$  estado inicial
- $F = \{ \text{estados internos que indican que un equilibrio de segundo orden fue hallado} \}$
- $\delta_A$ , función de transición de estados que implementa un operador de punto fijo que provee un precio de equilibrio ( el operador  $\mu$  )

Así resulta válido el siguiente

**Teorema 1** El sistema que consiste en los  $n$  autómatas  $C_1, \dots, C_n$  y el autómata  $A$  alcanza una etapa en la que cada  $C_i$  está en un estado interno de  $F_2^i$ ,  $A$  en un estado interno de  $F$

**Demostración 1** Esta conclusión es equivalente al hecho de que la economía  $\varepsilon$  alcanza un equilibrio general de segundo orden, lo que ya fue probado (Teorema 9 de [Tohmé 94])

## 4 Conclusiones

Se ha demostrado que una economía pura de intercambio constituida por agentes metarracionales puede encontrar en forma consistente un equilibrio general. Más aún, que en el caso de considerar funciones recursivas parciales definidas en y sobre el anillo conmutativo de los reales, dicho equilibrio puede hallarse en forma efectiva.

Queda por verse si estos resultados resultan robustos a modificaciones en las condiciones planteadas. En principio es claro que la propiedad de monotonicidad de la correspondencia de demanda no es *genérica*, pero suponiendo que la economía es regular ([Hildenbrand 86]) se puede analizar

cómo la información incorrecta puede llevar a generar un proceso dinámico de aprendizaje. Otro tipo de análisis que se debe efectuar es el de las propiedades de las soluciones aproximadas (inevitables pues todo proceso de computación real se efectúa en términos discretos). En suma este trabajo sólo ofrece un marco preliminar para una serie de estudios acerca de la computabilidad de los procesos de decisión en que intervienen consideraciones estratégicas.

## References

- [Blum-Shub-Smale 89] Blum, L.- Shub, M. - Smale, S. On a Theory of Computation and Complexity over the Real Numbers, *Bulletin of the American Mathematical Society* 21(1) julio 1989.
- [Eilenberg 74] Eilenberg, S. *Automata, Languages and Machines*, Academic Press, New York 1974.
- [Grandmont 82] Grandmont, J.-M. Temporary General Equilibrium, en *Handbook of Mathematical Economics* (vol. II), Arrow, K.- Intriligator, M. (eds.), North-Holland, Amsterdam 1982.
- [Henkin 49] Henkin, L. The Completeness of the First-order Functional Calculus, *Journal of Symbolic Logic*, 14(2) mayo 1949.
- [Hildenbrand 86] Hildenbrand, W. Equilibrium Analysis in Large Economics, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Berkeley 1986.
- [Radner 82] Radner, R. Equilibrium under Uncertainty, en *Handbook of Mathematical Economics* (vol. II), Arrow, K.- Intriligator, M. (eds.), North-Holland, Amsterdam 1982.
- [Reiter 77] Reiter, S. Information and Performance in the (New)<sup>2</sup> Welfare Economics, *American Economic Review* 67(1) febrero 1977.
- [Rustem-Velupillai 90] Rustem, B.- Velupillai, K. Rationality, Computability and Complexity *Journal of Economic Dynamics and Control* 14(3) septiembre 1990.
- [Stigum 91] Stigum, B. *Toward a Formal Science of Economics*, MIT Press, Cambridge 1991.
- [Tohmé 94] Tohmé, F. *Metarracionalidad y Equilibrio General*, tesis U.N.S., mayo 1994.