

LA ASIGNACIÓN FEDERAL DE BIENES PÚBLICOS MEDIANTE LA REGLA DE LA MAYORÍA: EXISTENCIA DEL EQUILIBRIO POLÍTICO*

Leandro R. Arozamena

Universidad Nacional del Sur

Junio de 1994

* Este trabajo es una versión parcial revisada del Trabajo de Grado presentado en la Universidad Nacional del Sur en abril de 1994.

I - INTRODUCCIÓN

Bien conocidas son las dificultades resultantes de aplicar las pautas correspondientes a los mercados competitivos a la asignación de bienes públicos. Un método descentralizado a tal punto da lugar a la aparición de soluciones ineficientes, es decir, no óptimas en el sentido de Pareto. Fenómenos tales como la existencia de incentivos para revelar falsamente las preferencias por parte de cada agente (el problema "free rider") colocan obstáculos adicionales en el camino hacia la optimalidad.

Las precedentes conclusiones han motivado el surgimiento de formulaciones teóricas referidas al suministro de bienes públicos por parte del Estado. En efecto, la ineficiencia de los mecanismos privados conduce, lógicamente, al análisis de los procedimientos de asignación por parte del sector público, con el objeto de verificar las propiedades de los resultados que por esta vía se generan.

El traslado del suministro de bienes públicos al sector estatal motiva que la determinación de las cantidades que se proveerán a los agentes se transforme en una decisión política. De hecho, debe especificarse algún mecanismo, alguna regla de elección que permita, en base a las preferencias individuales, fijar la asignación colectivamente escogida. A este respecto se presentan, claro está, diversas opciones —las reglas de la unanimidad o de la mayoría en procedimientos democráticos, la dictadura benevolente, etc.—, las que han dado origen a distintas ramas de la literatura.

Todas ellas, sin embargo, se han concentrado en el caso en que existe una única instancia gubernamental, un único nivel de decisión política. En la realidad, no obstante, el suministro de bienes públicos suele dividirse según la naturaleza de los mismos en distintos niveles y jurisdicciones. El presente trabajo se propone, en este sentido, extender el análisis a aquella situación en la que existen diferentes tipos de bienes públicos, nacionales y locales, provistos a través de instancias diferenciadas dentro del sector público. Se trata, en otros términos, de un sistema federal.

La extensión propuesta se formula aquí para un procedimiento específico de decisión política: la regla de la mayoría simple. Consecuentemente, se emplea como fundamento aquella parte de la teoría de las decisiones sociales referida a los procesos de elección colectiva que utilizan dicha regla. Las conclusiones a las que el mencionado cuerpo teórico ha arribado advierten sobre las dificultades que la regla de la mayoría conlleva¹. En efecto, ella no escapa al teorema de la imposibilidad de Arrow (1951), e impone el riesgo de arribar a un resultado cíclico, transformado prácticamente en certidumbre en votaciones multidimensionales². Deben especificarse, por consiguiente, condiciones que aseguren que, al menos en un único nivel de decisión, la regla escogida ha de generar un equilibrio, de modo de hallarse en condiciones de comprobar si ello también ocurre si existen niveles de decisión múltiples.

Slutsky (1977) y Shepsle (1979) introdujeron un nuevo elemento de modo tal que los procesos de decisión de este tipo se hallaran en condiciones de asegurar la existencia del equilibrio: las instituciones. Se trata de normas y reglas de procedimiento que usualmente limitan las elecciones colectivas —qué alternativas pueden considerarse, quiénes pueden votar, etc.—. En ambos trabajos se arriba a una misma conclusión: la estructura institucional tiene un efecto independiente y relevante sobre la existencia del equilibrio; aún más, dado que las preferencias no garantizan el equilibrio, las instituciones lo generan y, junto con aquéllas, codeterminan su ubicación en el espacio de políticas. La vía a través de la cual las reglas de procedimiento dan origen a este efecto radica en sólo permitir la consideración de alternativas al status quo a lo largo de una dimensión por vez, dando lugar a la aplicación del teorema del votante mediano y generando así un ordenamiento social de preferencias incompleto. La aplicación de la regla de la mayoría en este marco brinda, pues, en un único nivel de decisión, los resultados deseados.

¹ Para un mayor desarrollo de temas relativos a la teoría de las decisiones sociales que aquí sólo se mencionan, especialmente el carácter cíclico de los procesos regulados por la regla de la mayoría pura, se remite a Inman (1987) y Mueller (1989).

² Véase, por ejemplo, Plott (1967).

El objetivo de las presentes páginas consiste, por lo tanto, en verificar la existencia del equilibrio en la asignación de bienes públicos para el caso de un sistema federal en el que las decisiones políticas se adoptan teniendo en cuenta normas institucionales. En otras palabras, se plantea la extensión de los modelos de Slutsky y Shepsle a aquella situación en la que existe más de un nivel de decisión. La sección siguiente se ocupa de la formulación del modelo que representa un mecanismo político como el descrito. A continuación, se demuestra la existencia del equilibrio en dicho mecanismo. Finalmente, se resumen los resultados alcanzados y se evalúan sus características.

II - EL EQUILIBRIO POLÍTICO FEDERAL: EL MODELO

La decisión política de asignación de bienes públicos constituye, claro está, un elemento de la demanda de la economía. En efecto, así como la demanda agregada de bienes privados surge a través de la suma de las demandas individuales, la demanda social de bienes públicos se determina, en base a las preferencias individuales, mediante la manifestación de éstas en un proceso político de decisión. Por consiguiente, la elección colectiva puede ser tratada de dos modos diferentes. En primer lugar, puede analizarse exclusivamente el mecanismo político de asignación tomando a los precios como fijos; este es el camino elegido por Shepsle(1979), e implica dejar fuera de consideración a la interacción entre la oferta y la demanda. Por otra parte, resulta factible incluir dicha interacción en el análisis, introduciendo a todos los precios como variables en el modelo; en otros términos, se trata de un enfoque de equilibrio general, alternativa escogida por Slutsky(1977). Se ha optado aquí por la primera de las vías disponibles para abordar el problema, puesto que permite una mayor concentración en las características específicas que distinguen a la presente formulación de los modelos previos, es decir, la interrelación entre niveles diferenciados de decisión. Debe destacarse, sin embargo, que el modelo expuesto en estas páginas puede constituirse en parte de un análisis de equilibrio general sin más modificación que la explicitación de

aquellas variables que aquí se consideran fijas implícitamente, obteniéndose además resultados análogos³.

Se supone que existe en la economía un conjunto de agentes $N = \{1, \dots, n\}$. A él corresponde la colección de conjuntos $D = \{D_k\}$, $k = 1, \dots, K$, que constituye una partición de N , por lo que $\bigcup_k D_k = N$ y $\bigcap_k D_k = \emptyset$. Cada $D_k \in D$ define un *distrito*. Por consiguiente, los distritos se caracterizan, en esta etapa, únicamente por ser diferentes conjuntos de agentes. El hecho de que D sea una partición de N , además, introduce el muy razonable supuesto de que un agente deba necesariamente formar parte de un y sólo un distrito.

La decisión política, como se expuso, se refiere a la asignación de bienes públicos, de los que existen dos tipos:

- q bienes públicos *nacionales*, es decir, provistos por el sector público central y a los que acceden todos los agentes de la economía;
- r bienes públicos *locales*, suministrados a nivel distrital y a los que se halla en condiciones de acceder todo agente que forme parte del correspondiente distrito.

El supuesto según el cual en cada distrito se provee el mismo número r de bienes públicos locales se adopta al solo efecto de simplificar la notación. Las formulaciones y los resultados que siguen no se ven afectados por ello, de modo que igualmente valen en caso de existir bienes públicos locales que se suministren sólo en algunos distritos y no en otros.

Cabe destacar aquí que se supone la inexistencia de externalidades entre los diferentes distritos en la provisión de bienes públicos locales, de modo que los bienes públicos correspondientes al distrito D_k sólo benefician al agente i si $i \in D_k$. Por otra parte, debe tomarse al sistema impositivo que regula el financiamiento del sector público y, por ende, de la provisión de bienes públicos como dado. El hecho de no considerar a los bienes privados y públicos conjuntamente permite que el sistema impositivo no se introduzca explícitamente, sino que se halle implícito en las preferencias de los agentes.

³ Véase Arozamena (1994).

$g \in \Omega^q$ indica una asignación de bienes públicos nacionales, donde Ω^q representa el ortante no negativo del espacio q -dimensional. Análogamente, para cada distrito D_k , $k=1, \dots, K$, $z_k \in \Omega^r$ indica una asignación de bienes públicos locales. $z = (z_1, \dots, z_K) \in \Omega^{rK}$ designa, pues, una asignación de bienes públicos locales por distritos para toda la economía.

Cada agente cuenta con un ordenamiento completo y transitivo de preferencias $\succ_i$ sobre las alternativas $(g, z_k) \in \Omega^{q+r}$, representable a través de una función de utilidad $u^i = u^i(g, z_k)$ continua y estrictamente cuasiconcava, para todo $i \in D_k$, $k=1, \dots, K$. Es decir que los argumentos de la función de utilidad individual se restringen a los bienes públicos nacionales y a los bienes públicos locales correspondientes a su distrito.

Sobre esta base se define el mecanismo político de elección colectiva. La decisión con respecto a los bienes públicos se toma comparando las alternativas de a pares y aplicando la regla de la mayoría en dos niveles: nacional y local. En el primer caso, el valor de g se determina en una votación en la que participan todos los agentes de la economía, es decir, todo agente $i \in N$. En el segundo, para cada distrito D_k , $k=1, \dots, K$, el valor de z_k se fija de igual modo, pero sólo intervienen en la votación los agentes $i \in D_k$. Se observa, en definitiva, que se trata de dos decisiones separadas pero interdependientes. En efecto, las preferencias de los agentes al definir el valor de g dependen del valor de z_k en sus correspondientes distritos, valor éste que no puede ser modificado en la decisión nacional. Lo opuesto ocurre, claro está, en cada votación distrital, donde g tiene un valor fijo e inamovible que influye sobre la decisión local con respecto a z_k .

Desde ya, la distinción entre bienes públicos nacionales y locales carece de sentido si $K=1$, por cuanto los participantes en las votaciones a ambos niveles serían los mismos. La existencia de un único distrito conduce a la situación analizada por Slutsky (1977) y Shepsle (1979), por lo que ésta puede considerarse un caso particular del modelo aquí planteado.

Dado un conjunto A , sea $|A|$ el número de elementos de A . Luego, para dos alternativas x e y , $|x \succ_i y|$ indica el número de agentes i para los que x es preferida a y . Para un valor fijo de z , pues, en una votación a nivel nacional, y para $g', g'' \in \Omega^q$, g' derrota a g'' si

$|g' \succ_i g''| = |u'(g') > u'(g'')| > |g' \prec_i g''|, i \in N$. Análogamente, en cada distrito $D_k, k=1, \dots, K$, y para $z_k', z_k'' \in \Omega^r$, z_k' derrota a z_k'' si $|z_k' \succ_i z_k''| > |z_k' \prec_i z_k''|, i \in D_k$.

El mecanismo político hasta aquí especificado para cada nivel de decisión no es sino la regla de la mayoría pura. Resulta necesario, por lo tanto, introducir las restricciones que permitan unidimensionalizar las decisiones. A ello se pasa a continuación.

Sea $E_g = \{e_j\}, j=1, \dots, q$, una base de Ω^q que indica las direcciones de cambio permitidas en el caso de la asignación de bienes públicos nacionales. Sea, además, $E_z = \{E_z^k\}, k=1, \dots, K$, una colección de conjuntos $E_z^k = \{e_h\}, h=1, \dots, r$, que designan las direcciones permitidas de cambio en las asignaciones de bienes públicos locales en cada distrito D_k .

Dado el status quo (g^0, z^0) , estos conjuntos de vectores acotan las modificaciones factibles en las provisiones de bienes públicos en ambos niveles. Es posible, por consiguiente, definir a partir de ellos los conjuntos de alternativas permitidas en la votación nacional y en cada votación distrital, a saber:

Definición 1: Los conjuntos de alternativas permitidas al status quo (g^0, z^0) están dados por

$$v(g^0) = \{g \in \Omega^q : g = g^0 + \lambda e_j, \lambda \in R, e_j \in E_g\}$$

para los bienes públicos nacionales y por

$$v(z_k^0) = \{z_k \in \Omega^r : z_k = z_k^0 + \lambda e_h, \lambda \in R, e_h \in E_z^k\}$$

para los bienes públicos locales en el distrito $D_k, k=1, \dots, K$.

Las restricciones aquí impuestas se toman de Slutsky (1977), y evitan la consideración, en la decisión política de más de una dimensión por vez, hecho que conduciría a los problemas derivados del carácter cíclico e inestable de la regla de la mayoría pura. Resulta obvio, por otra parte, que toda una serie de reglas e instituciones subyacen a las

restricciones arriba expuestas. Shepsle, por ejemplo, recurre a la división de los votantes en comisiones especializadas en determinadas jurisdicciones para modelar la unidimensionalización de las votaciones. La formulación específica de las normas de las que se derivan los conjuntos de vectores que definen las alternativas aceptadas al status quo es dejada de lado en el presente trabajo. Debe recalcar, no obstante, que ello no implica que tales normas sean descartadas. Por el contrario, sin un trasfondo de reglas institucionales todo el problema aquí tratado carecería de sentido. La formulación desarrollada en estas páginas puede adaptarse a todo conjunto de reglas que sólo permita la consideración de una dimensión por vez⁴. El hecho de no incluirlas específicamente se debe a las complicaciones formales que ello causaría, sin afectar ni sumar generalidad a los resultados alcanzados, lo que restaría claridad al objetivo fundamental: la extensión de los modelos del equilibrio político a un sistema federal.

Sobre la base de los conjuntos de alternativas permitidas y la regla de votación, es posible definir los equilibrios que de ellos se derivan:

Definición 2: $g^* \in \Omega^g$ es un equilibrio político en la asignación de bienes públicos nacionales (EP_g) si

$$|g^* \succ_i g| \geq |g^* \prec_i g|, \forall g \in v(g^*), i \in N.$$

Definición 3: $z_k^* \in \Omega^z$ es un equilibrio político en la asignación de bienes públicos locales en el distrito D_k (EP_z^k) si

$$|z_k^* \succ_i z_k| \geq |z_k^* \prec_i z_k|, \forall z_k \in v(z_k^*), i \in D_k.$$

En términos globales, $z^* = (z_1^*, \dots, z_K^*) \in \Omega^{z^k}$ es un equilibrio político en la asignación de bienes públicos locales (EP_z) si z_k^* es un EP_z^k , para todo $k=1, \dots, K$.

⁴ La definición de las bases de los espacios políticos que limitan las modificaciones corresponden, de hecho, al caso de "comisión del conjunto" (committee-of-the-whole), "jurisdicciones simples" y "regla de afinidad" (germaneness rule) expuesto por Shepsle (1979). Para una discusión más amplia de los fundamentos institucionales de las restricciones véanse, además, Slutsky (1977) y Shepsle y Weingast (1981).

En suma,

Definición 4: $(g^*, z^*) \in \Omega^{q+k}$ es un equilibrio político para todo el sector público (EP) si

(i) g^* es un EP_g

(ii) z^* es un EP_z

La existencia del EP_g y de cada EP_{z^k} —y, por consiguiente, del EP_z — por separado puede demostrarse recurriendo a Shepsle (1979). La modificación introducida radica, pues, en la consideración de estos equilibrios de manera conjunta e interdependiente, situación ésta derivada de la existencia de un sistema federal.

Una necesaria aclaración final se refiere a la posibilidad de la existencia de comportamiento estratégico. Se supone aquí que los agentes votan con sinceridad, lo que desecha de plano tal tipo de actitud por parte de quienes intervienen en los procesos de decisión. De todas maneras, este supuesto puede considerarse razonable en el marco del mecanismo político expuesto, ya que, al votarse una dimensión por vez, la mejor estrategia es la indicada por las propias preferencias. El voto estratégico podría aparecer si los agentes conocieran las preferencias de los demás en todas las dimensiones, información probablemente no disponible. Por otra parte, el comportamiento no sincero en vista de las preferencias de los votantes de otros distritos requiere una información con la que resulta aún más improbable contar⁵.

III - LA EXISTENCIA DEL EQUILIBRIO

En primer lugar, resulta necesario para los pasos posteriores de la demostración restringir el espacio político de cada decisión a un subconjunto acotado del respectivo ortante no negativo que, hasta este punto, lo caracterizaba. Sean, por consiguiente

⁵ Sobre las condiciones requeridas para que el mecanismo político resulte a prueba de estrategias sin el supuesto de voto sincero véase Barberà, Gul y Stacchetti (1993).

$$Z_g = \{g \in \Omega^g : 0 \leq g_j \leq b\} \quad y$$

$$Z_z^k = \{z_k \in \Omega^z : 0 \leq z_{k_h} \leq b\}, k = 1, \dots, K.$$

La cota superior b puede interpretarse como un límite impuesto por los recursos de la economía. Los nuevos espacios de decisión que incluyen esta restricción son ahora convexos y compactos, dado su carácter cerrado y acotado.

Esta redefinición de los espacios políticos agrava, sin embargo, un problema ya existente. En efecto, la definición adoptada de E_g y E_z , que no exige sino la independencia lineal de los vectores que pertenecen a cada conjunto, puede dar lugar a la aparición de *equilibrios triviales*, es decir, puntos de los espacios políticos que se convierten en equilibrios simplemente debido a que no existe ninguna otra asignación en el conjunto de alternativas permitidas⁶. Un ejemplo de esta situación puede observarse en la Figura 1. Allí se plantea el caso para la decisión relativa a los bienes públicos nacionales en un problema bidimensional. La asignación correspondiente al origen, de constituirse en status quo, se convierte en equilibrio político independientemente de las preferencias de los votantes, ya que $v[(0,0)] = \{(0,0)\}$.

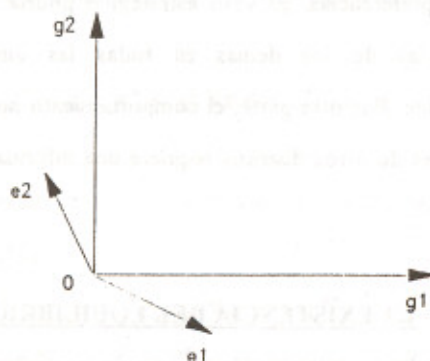


Figura 1

⁶ Véase Slutsky (1977), pág. 305.

Casos como este pueden generarse en la medida que la frontera del espacio político presente "esquinas". Si cada punto de la frontera del espacio político tuviera un único hiperplano soporte, sería posible asegurar que al menos uno de los vectores de la base respectiva definiría una dirección de cambio con alternativas permitidas diferentes del punto perteneciente a la frontera si éste fuese el status quo.

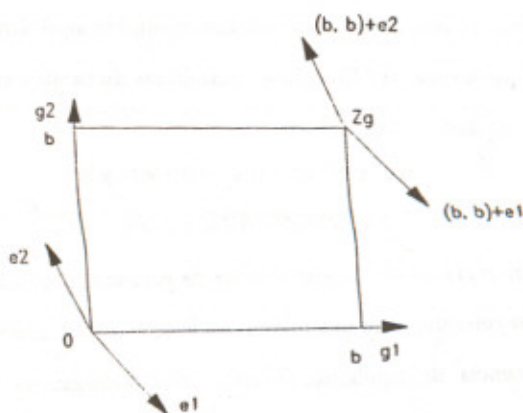


Figura 2(a)

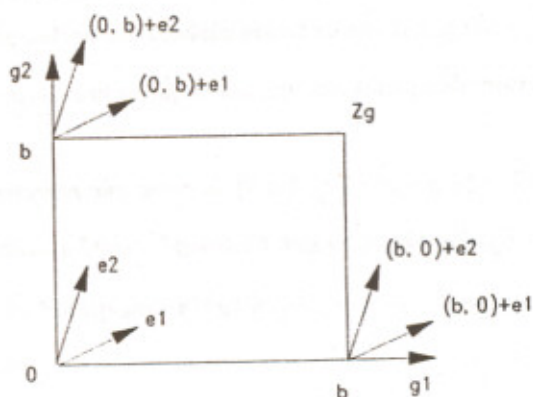


Figura 2(b)

El origen de coordenadas podría convertirse en equilibrio trivial aun con espacios políticos no acotados superiormente. No obstante, el acotamiento de éstos agrega "esquinas" y, por ende, puntos problemáticos, como se observa en las Figuras 2(a) y(b) para casos bidimensionales igualmente referidos a la decisión nacional. Allí, (b,b), (b,0) y (0,b) también resultan potenciales equilibrios triviales.

La ocurrencia de casos como los reflejados en las Figuras 1 y 2 y de sus análogos en problemas que involucran más de dos dimensiones se impide aquí suponiendo que al menos uno de los vectores que indican las direcciones permitidas de cambio es paralelo a uno de los ejes de coordenadas; es decir,

$$\begin{aligned} \exists e_j \in E_g: e'_j > 0, e'_l = 0, l \neq j \quad \text{y} \\ \exists e_h \in E_i: e'_h > 0, e'_l = 0, l \neq h, k = 1, \dots, K. \end{aligned}$$

Al menos una de las direcciones de cambio sólo ha de permitir, por consiguiente, modificaciones en el status quo referidas a un único bien público. Este supuesto permite eliminar la posibilidad de la presencia de equilibrios triviales al garantizar en todos los casos la existencia de alternativas permitidas diferentes del status quo.

Considérese a continuación la situación planteada a lo largo de una única dirección de cambio permitida en un único nivel de decisión. Tómese como ejemplo la dirección definida por un vector $e_j \in E_g$ en la asignación de bienes públicos nacionales, para un status quo g^0 dado. Obviamente, el valor de z permanece fijo, por lo que se lo excluye de la notación⁷.

Definición 5: Sea $G_j = \{g: g = g^0 + \lambda e_j, \lambda \in R\}$ la recta que representa la dirección de cambio dada por $e_j \in E_g$. Para el status quo g^0 , sea $g^{*j} = (g^{*j}_1, \dots, g^{*j}_K)$ el punto ideal del agente i en G_j . Luego, $g^{*j} = g^0 + \lambda e_j$, con $u^i(g^{*j}) = \max_{\lambda} [u^i(g^0 + \lambda e_j)]$, $i \in N$.

⁷ Los pasos siguientes se basan en Shepsle (1979), págs. 38-40.

Definición 6: Un ordenamiento de preferencias tiene un solo tope en G_j si y sólo si, para todo $g \in G_j$, $g \neq g^{*j}$, $u^i[\alpha g + (1-\alpha)g^{*j}] > u^i[\beta g + (1-\beta)g^{*j}]$ siempre que $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$, siendo g^{*j} el punto ideal en G_j según la definición 5.

Lema 1: Si $u^i: Z_g \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y estrictamente cuasicóncava, para $e_j \in E_g$, entonces

- (i) g^{*j} existe;
- (ii) g^{*j} es único;
- (iii) el ordenamiento de preferencias tiene un solo tope en G_j .

La Figura 3 ilustra esta situación en el caso bidimensional.

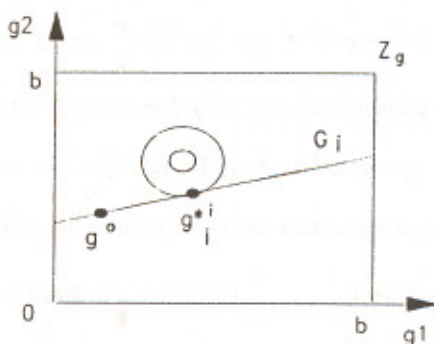


Figura 3

- Demostración:** (i) Dado que G_j es una recta y que Z_g es compacto y convexo, $G_j \cap Z_g$ es compacto y convexo. Al ser u^i continua, por el teorema de Weierstrass, g^{*j} existe.
- (ii) La estricta cuasicóncavidad de u^i implica, además, que g^{*j} es único.

(iii) Para un valor dado de $g \in G_j$, sea $g'' = \beta g + (1-\beta)g^{*j}$. Por (i), $u^i(g'') \leq u^i(g^{*j})$.

Sea $g' = \rho g^{*j} + (1-\rho)g''$, $0 < \rho < 1$. Por la estricta cuasiconcavidad de u^i , $u^i(g') > u^i(g'')$.

De la definición de g'' se deriva que

$$g' = \rho g^{*j} + (1-\rho)[\beta g + (1-\beta)g^{*j}] = (1-\rho)\beta g + [\rho + (1-\rho)(1-\beta)]g^{*j}.$$

Sea $\alpha = (1-\rho)\beta < \beta$. Luego, $g' = \alpha g + (1-\alpha)g^{*j}$. Se cumplen, pues, todas las condiciones de la definición 6, por lo que el ordenamiento de preferencias tiene un solo tope en G_j . □

Sea

$$\gamma_j^* = \{g \in Z_n : g = g^o + \delta e_j, \delta \in R, |g^{*j} = g^o + \lambda^{*j} e_j : \lambda^{*j} \geq \delta| \geq \frac{n}{2} \text{ y}$$

$$|g^{*j} = g^o + \lambda^{*j} e_j : \lambda^{*j} \leq \delta| \geq \frac{n}{2}, i \in N\}.$$

Luego, si n es impar, sólo pertenece al conjunto γ_j^* la mediana del conjunto $\{g^{*1}, \dots, g^{*j}\}$ de puntos ideales de los n agentes $i \in N$ en G_j . De ser n par, pertenecerán a γ_j^* los puntos pertenecientes al intervalo comprendido entre los puntos de máxima preferencia de los agentes que ocupan las posiciones $\frac{n}{2}$ y $\frac{n}{2} + 1$ -ésima a lo largo de G_j . La Figura 4 refleja casos con dos dimensiones y cuatro y cinco votantes.

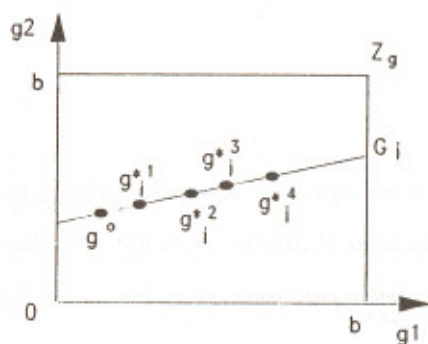


Figura 4(a)

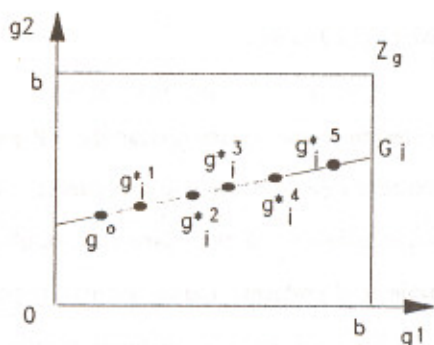


Figura 4(b)

En la Figura 4(a), $\gamma_j^g = \{g \in G_j : g \in [g_i^{*2}, g_i^{*3}]\}$. En la Figura 4(b), $\gamma_j^g = \{g_i^{*3}\}$.

Análogamente se define γ_j^g para todo $e_i \in E_g, i \neq j$, con un status quo g^0 dado.

Del mismo modo, con un valor de g fijo y un status quo $z^0 = (z_1^0, \dots, z_K^0)$ dado, definiciones análogas a 5 y 6 y una demostración análoga a la del Lema 1 permiten obtener de igual forma conjuntos $\gamma_h^{z^k}$ para todo $e_h \in E_z^k, k = 1, \dots, K$. Se hallan ya definidos, por consiguiente, los conjuntos medianos correspondientes a cada dirección permitida de cambio en cada nivel de política.

Lema 2: (g°, z°) es un EP si:

$$(i) \quad g^{\circ} \in \bigcap_j \gamma_j^g,$$

$$(ii) \quad z_k^{\circ} \in \bigcap_h \gamma_h^{z_k}, k = 1, \dots, K.$$

Demostración: Por el Lema 1 y las formulaciones análogas correspondientes a las decisiones distritales, las funciones u^i tienen un solo tope a lo largo de cada una de las direcciones permitidas de cambio para cada nivel de decisión. Entonces, por el teorema de Black (1958):

$$(i) \quad g^{\circ} \in \bigcap_j \gamma_j^g \text{ derrota a todo } g \in v(g^{\circ}), \text{ por lo que } g^{\circ} \text{ es un EP}_g;$$

$$(ii) \quad \text{cada } z_k^{\circ} \in \bigcap_h \gamma_h^{z_k} \text{ derrota a todo } z_k \in v(z_k^{\circ}), \text{ por lo que } z_k^{\circ} \text{ es un EP}_{z_k}, k=1, \dots, K.$$

Luego, según la definición 4, (g°, z°) es un EP. □

Hasta aquí se han obtenido ciertas características del EP para un status quo (g°, z°) dado. Resta verificar la existencia de un status quo que cuente con tales propiedades, esto es, la existencia misma del equilibrio. Para ello, claro está, resulta necesario considerar al status quo como una variable en el problema. Existe, además, la posibilidad de demostrar la existencia del EP_g y de cada EP_{z^k} por separado, lo que requeriría considerar fijos a z y a g respectivamente. Como ya se mencionó, ello fue realizado por Shepsle (1979). Por ende, se pasa aquí directamente a la consideración del equilibrio conjunto, tomando tanto a g como a z como variables.

Una vez más, se escoge la decisión referida a los bienes públicos nacionales como ejemplo. En estas nuevas condiciones, existirá una función que asignará a cada valor de (g, z) el correspondiente punto ideal en cada dirección permitida de cambio, definida para cada $e_j \in E_g$. Entonces, sea

$$g^{*j}(g, z_k): Z_g \times Z_z \rightarrow Z_g, \text{ con } Z_z = \prod_{k=1}^K Z_{z_k},$$

$$g^{*i}_j(g, z_k) = g + \lambda e_j, \text{ con } u^i(g^{*i}_j, z_k) = \max_{\lambda} [u^i(g + \lambda e_j, z_k)], i \in D_k, k = 1, \dots, K.$$

Lema 3: $g^{*i}_j(i)$ no es vacía,

(ii) tiene un valor único,

(iii) es continua en $Z_g \times Z_z$.

Demostración: (i) y (ii) se demuestran siguiendo pasos análogos a los dados en el Lema 1 (i) y (ii).

(iii) Dado que u^i es continua, también lo es la solución al problema de maximización del que surge g^{*i}_j . □

γ_j^* debe redefinirse como una correspondencia, a saber:

$$\gamma_j^*: Z_g \times Z_z \rightarrow Z_g,$$

$$\gamma_j^* \equiv \{\hat{g} \in Z_g : \hat{g} = g + \delta e_j, \delta \in R, |g^{*i}_j(g, z_k) = g + \lambda^{*i}_j e_j : \lambda^{*i}_j \geq \delta| \geq \frac{n}{2} \text{ y}$$

$$|g^{*i}_j(g, z_k) = g + \lambda^{*i}_j e_j : \lambda^{*i}_j \leq \delta| \geq \frac{n}{2}, i \in D_k, k = 1, \dots, K\}.$$

Lema 4: (i) $\gamma_j^*(g, z)$ es semicontinua superiormente en $Z_g \times Z_z$. Si tiene un valor único, es continua.

(ii) $\gamma_j^*(g, z)$ es convexa para cada $(g, z) \in Z_g \times Z_z$.

Demostración: (i) Si n es par, $\gamma_j^*(g, z)$ no tiene, por lo general, un valor único. Sea la sucesión $((g^a, z^a))$ tal que $(g^a, z^a) \rightarrow (g^o, z^o)$. Sea también (g^b) , tal que $g^b \in \gamma_j^*(g^a, z^a)$, $g^b \rightarrow g^c$. La semicontinuidad superior de $\gamma_j^*(g, z)$ se demuestra si $g^c \in \gamma_j^*(g^o, z^o)$.

Tómese un punto ideal $g^{*j}(g^a, z_k^a) = g^a + \lambda^{*ja} e_j$, con $g^b = g^a + \delta^b e_j$. Por el Lema 3, cada $g^{*j}(g, z_k)$ es continua. Luego, si $\lambda^{*ja} \geq \delta^b, (g^a, z_k^a) \rightarrow (g^o, z_k^o)$ y $g^b \rightarrow g^c$, entonces, para $g^{*j}(g^o, z_k^o) = g^o + \lambda^{*jo} e_j$ y $g^c = g^o + \delta^c e_j$, $\lambda^{*jo} \geq \delta^c$. Dado que $g^b \in \gamma_j^*(g^a, z_k^a)$, $|g^{*j}(g^a, z_k^a) = g^a + \lambda^{*ja} e_j; \lambda^{*ja} \geq \delta^b| \geq \frac{n}{2}$. Entonces,

$|g^{*j}(g^o, z_k^o) = g^o + \lambda^{*jo} e_j; \lambda^{*jo} \geq \delta^c| \geq \frac{n}{2}$. Análogamente puede comprobarse que

$|g^{*j}(g^o, z_k^o) = g^o + \lambda^{*jo} e_j; \lambda^{*jo} \leq \delta^c| \geq \frac{n}{2}$. De ello se deriva que $g^c \in \gamma_j^*(g^o, z_k^o)$, por lo que $\gamma_j^*(g, z)$ es semicontinua superiormente.

Si n es impar, $\gamma_j^*(g, z)$ tiene un valor único. Luego, por la continuidad de cada $g^{*j}(g, z_k)$, $\gamma_j^*(g, z) = \text{mediana}(\{g^{*j1}, \dots, g^{*jn}\})$ es continua.

(ii) El conjunto $\gamma_j^*(g, z)$ constituye un intervalo cerrado para todo $(g, z) \in Z_g \times Z_z$. Luego, es convexo. □

Análogamente a lo ejemplificado para el caso de los bienes públicos nacionales, puede obtenerse una correspondencia $\gamma_h^{*k}: Z_g \times Z_z \rightarrow Z_z^k$ para cada $e_k \in E_z^k$ en cada distrito D_k , $k=1, \dots, K$, con las mismas propiedades e involucrando sólo a los agentes $i \in D_k$.

Se cuenta ya con todos los elementos necesarios para abordar la demostración central del presente trabajo.

Teorema: En la situación planteada y bajo los supuestos adoptados el EP existe.

Demostración: Sea $\chi: Z_g \times Z_z \rightarrow Z_g \times Z_z$, $\chi(g, z) = \prod_{j=1}^q \gamma_j^*(g, z) [\prod_{k=1}^K (\prod_{h=1}^r \gamma_h^{*k}(g, z_k))]$.

Al estar $\chi(g, z)$ dada por el producto cartesiano de correspondencias que, por el Lema 4, son semicontinuas superiormente en $Z_g \times Z_z$, es una correspondencia de dicho tipo.

Además, de igual modo es convexa para todo $(g, z) \in Z_g \times Z_z$. Luego, se cumplen todas las condiciones necesarias para la aplicación del teorema de punto fijo de Kakutani⁸:

$$\exists (g^*, z^*) \text{ tal que } (g^*, z^*) \in \chi(g^*, z^*).$$

Para el punto fijo (g^*, z^*) , ello implica que:

- (i) $g^* \in \gamma_j^k(g^*, z^*), \forall e_j \in E_g \Rightarrow g^* \in \bigcap_j \gamma_j^k(g^*, z^*)$;
- (ii) cada $z_k^* \in \gamma_h^k(g^*, z_k^*), \forall e_h \in E_z^k \Rightarrow z_k^* \in \bigcap_h \gamma_h^k(g^*, z_k^*)$.

Luego, según el Lema 2, g^* es un EP_g y cada z_k^* es un EP_z^k , por lo que z^* es un EP_z . Se cumplen en definitiva todos los requisitos de la Definición 4: (g^*, z^*) es un EP. $\square$

Existe, pues, al menos un punto del conjunto $Z_g \times Z_z$ cuyas componentes pertenecen a los conjuntos medianos en todas las direcciones permitidas de cambio en todas las decisiones de asignación de bienes públicos, nacional y locales. Se trata de un equilibrio político que, inducido mediante la estructura de normas que conducen a la reducción de las decisiones a una única dimensión por vez, compatibiliza las elecciones colectivas a ambos niveles en el marco del modelo propuesto de un sistema federal.

No es posible asegurar la unicidad del equilibrio cuya existencia se ha demostrado. De hecho, el equilibrio sólo puede resultar único en un caso particular: aquel en el que n es impar y la partición $D = \{D_k\}$ es tal que $|D_k|$ resulta impar para todo $k = 1, \dots, K$. En términos generales, por ende, existirá una multiplicidad de equilibrios. No se estudia aquí, además, el problema de la estabilidad del equilibrio. Ello requeriría la especificación de las funciones de utilidad de los agentes, por lo que se trata de una posible extensión de los presentes resultados. Finalmente, tampoco es factible asegurar que el equilibrio resulte un óptimo de Pareto. Una adecuada presentación gráfica de los casos posibles puede hallarse en Shepsle (1979) para un único nivel de decisión. Su análisis es extensible a un sistema federal mediante la simple consideración de dos niveles de decisión.

⁸ Véase Green y Heller (1981).

IV - EVALUACIÓN FINAL

En la sección precedente se ha demostrado que la extensión de los mecanismos de decisión social a través de la regla de la mayoría con restricciones institucionales a un sistema federal no altera sus propiedades. En efecto, las conclusiones a las que se arriba coinciden con las expuestas por Slutsky (1977) y Shepsle (1979). Básicamente, el equilibrio existe aun con niveles diferenciados de decisión en los que se resuelve la asignación de clases distintas de bienes públicos.

Por otra parte, los resultados se mantienen sin adoptar más supuestos adicionales que los estrictamente necesarios para la modelización del sistema federal, de modo tal que su grado de generalidad no se ve reducido. Muy por el contrario, se incrementa, por cuanto, como se mencionó en la sección II, la decisión en un único nivel constituye un caso particular del modelo aquí expuesto. Se le adosa, además, la posibilidad de abarcar una variante de organización institucional ampliamente aplicada en diferentes países.

Sin embargo, así como la extensión planteada conserva las propiedades originales, no agrega ninguna nueva. En particular, tampoco aquí es posible garantizar que el equilibrio político ha de resultar un óptimo de Pareto. En primer lugar, las restricciones impuestas por las direcciones permitidas de cambio generan un ordenamiento social de preferencias incompleto, de manera que ciertos cambios óptimos de Pareto pueden hallarse fuera del alcance de los votantes. Asimismo, no existe ningún paso en el mecanismo político descripto a través del cual las tasas marginales de sustitución de cada agente se manifiesten en la alternativa mediana. Ello implica que la condición de optimalidad, según la cual la suma de las tasas marginales de sustitución de todos los individuos entre un bien privado y un bien público debe igualar a la tasa marginal de transformación correspondiente, puede no cumplirse. Tal conclusión se aplica ya a decisiones unidimensionales como las planteadas por Black (1958), y se traslada, a través de la reducción de las comparaciones entre alternativas a una única dimensión por vez, a las estructuras institucionales. El sistema

federal no hace sino multiplicar dichas estructuras, por lo que no es de extrañar que la optimalidad paretiana pueda no lograrse en el caso aquí presentado.

Cabe efectuar a este respecto, no obstante, dos observaciones. Lo que aquí se afirma es que no resulta posible *garantizar* mediante el mecanismo político federal que el equilibrio coincidirá con un óptimo paretiano. Tal aserción no implica que dicha coincidencia no pueda darse de hecho. Ello dependerá de una serie de factores –la forma específica de las funciones de utilidad, su ubicación en los espacios políticos en cada nivel de decisión, las direcciones permitidas de cambio, etc.– que condicionan su probabilidad de ocurrencia, mas ningún elemento impone un equilibrio no óptimo en todos los casos. En segundo término, la evaluación de esta estructura institucional federal no debe depender de que brinde o no un equilibrio óptimo. Más bien, deben compararse sus resultados con aquellos que generan otras formas institucionales, otras reglas de decisión y otros comportamientos estatales.

Finalmente, el mecanismo político aquí expuesto para dos puede extenderse a *n* niveles de decisión sin que sus resultados se vean afectados. La incorporación de los precios como variables del modelo –lo que obligaría a la explicitación del sistema impositivo– permitiría, además, introducir en el análisis distintas formas de interrelación entre los diferentes niveles de gobierno.

Referencias bibliográficas

Arozamena, L. (1994), "Existencia del equilibrio político y económico en la asignación federal de bienes públicos mediante la regla de la mayoría", Trabajo de Grado, Universidad Nacional del Sur.

Arrow, K. (1951) "Social Choice and Individual Values", Wiley, Nueva York.

Barberá, S., Gul, F. y Stacchetti, E. (1993), "Generalized Median Voter Schemes and Committees", Journal of Economic Theory, Volumen 61, págs. 262-281.

Black, D. (1958) "The Theory of Committees and Elections", Cambridge University Press, Cambridge.

Green, J. y Heller, W. (1981) "Mathematical Analysis and Convexity", en Arrow, K. e Intriligator, M.(comp.), "Handbook of Mathematical Economics", Volumen 1, North-Holland, Amsterdam.

Inman, R. (1987) "Markets, Government and the New Political Economy", en Auerbach, A. y Feldstein, M.(comp.), "Handbook of Public Economics", Volumen 2, North-Holland, Amsterdam.

Mueller, D. (1989), "Public Choice II", Cambridge University Press, Cambridge.

Plott, C. (1967), "A Notion of Equilibrium and its Possibility under Majority Rule", American Economic Review, Volumen 57, págs. 787-806.

Shepsle, K. (1979) "Institutional Arrangements and Equilibrium in Multidimensional Voting Models", American Journal of Political Science, Volumen 23, págs. 27-59.

Shepsle, K. y Weingast, B. (1981), "Structure-induced Equilibrium and Legislative Choice", Public Choice, Volumen 37, págs. 503-519.

Slutsky, S. (1977) "A Voting Model for the Allocation of Public Goods: Existence of an Equilibrium", Journal of Economic Theory, Volumen 14, págs. 299-325.