I N T A Central

Dirección de Control y Evaluación

E S T U D I O E C O N O M E T R I C O P A R A L A C O M E R C I A L I Z A C I O N D E G A N A D O B O V I N O

Norma M. Cantatore de Frank (')

- 1988 -

Parte de la información básica utilizada para la elaboración de éste trabajo fue brindada por la cabaña "La Danesa" de Firpo Hnos. Mi agradecimiento.

I N D I C E

I . Introducción
1.1. Objetivos del trabajo

II . Material y Métodos
2.1. Material
2.2. Métodos
2.2.1. Características de las curvas ajustadas al crecimiento de los animales
2.2.2. La edad óptima de comercialización de bovinos

III . Resultados
3.1. Ajuste de las funciones de Gompertz y cuadrática a cada animal
3.2. Ajuste de las funciones de Gompertz y cuadrática a los datos de todos los animales
3.3. Determinación de la edad óptima de comercialización

IV . Conclusiones

Bibliografía

Apéndice

SUMMARY

The basic objectives of this research were:

1) To adhyst two types of functions to the weighted growth of cattle, as follows:

   Gompertz' function

   $$y = A B^{c\,t}$$

   and

   cuadratic function

   $$y = A + Bt + Ct^2$$

   where y represents the weight of an animal at the age t and A, B and C are the parameters.

2) To determine the economic slaughter age of the animal, that is, the value of time t that, given an interest rate, leads to the maximum value of present net income per animal.

   To reach these objectives, data refering to monthly weights of 106 head of cattle, were utilized.

Based on the results obtained, the following conclusions were drawn:

1) Gompertz' function showed a better adjustment to the weighted growth data of cattle. This function has all the characteristics of an animal growth function.

2) Although the cuadratic function did not adjust to all animals, when it does adjust, it leads to an optimum age approximately equal to that obtained through gompertz' function. It also offerts the advanage of being more easily adjusted and of resulting in a much less complex equation than that of Compertz to determine the value of optimum slaughter age of cattle.

3) The optimum slaughter age for the male animals of the Abeerden Angus breed is around 27,5 months, with a weight of 491 kilos. This results were obtained considering a monthly cost per animal equal to ₳ 17.0, a price per kilogram of live animal of ₳ 2.32 and an interest rate of 10% per month.

4) The economic slaughter age is little changed when using a monthly cost of A 14.0 or A 20.0. In general, the variation was of 2 months higher or lower respectively.

5) The general practice of salughtering the animal when it reaches about 450 kg of weight may lead to the obtention of a lower net income than would be the case if the slaughter age were determined according to the curve of weighted development of each animal.

I . INTRODUCCION

Sabido es que el conocimiento de las funciones de crecimiento resulta de utilidad en trabajos de selección para mejoramiento, permitiendo, dado el peso de un animal para determinados meses, estimar el mismo en algún momento intermedio (interpolación de la curva) o bien, en el futuro (extrapolación).

Un aspecto importante en el estudio de las curvas de crecimiento y que se encaró en éste trabajo, es la comercialización de ganado bovino, dado que la misma se realiza en base al peso.

En general, lo productores venden sus animales cuando los mismos llegan al peso de comercialización (aproximadamente 450 kg); frecuentemente, deben esperar un lapso prolongado para ello. Se estima posible que existan, aún en los casos de desarrollo más lento, momentos en que los productores pueden obtener mayor rentabilidad antes de que el animal llegue al peso antes mencionado.

De esta manera, sabiendo que muchas decisiones se toman empiricamente sin estar fundamentadas en resultados provenientes de investigaciones tecnicamente desarrolladas, se encaró en éste trabajo la posibilidad de obtener resultados que sirvan como indicadores referentes a los mejores momentos para la comercialización del ganado bovino.

1.1. Objetivos del trabajo

Este trabajo tiene por objetivos básicos:

i) ajustar 2 tipos de funciones al crecimiento del ganado bovino; ellas son:

- Función Gompertz

$$y = A\,B^{C^t}, \text{ con } A > 0 \text{ y } B \text{ y } C \in (0;1)$$

- Función cuadrática

$$y = A + B\,t + C\,t^2, \text{ con } C < 0 \text{ y } B > 0$$

donde:

Y : peso en Kg de una cabeza de ganado

t : tiempo en meses

(') Dirección de Control y Evaluación - INTA Central - Rivadavia 1439 - 1033 Buenos Aires - Argentina.

A, B y C: parámetros

ii) determinar la edad economicamente rentable de comercialización de los animales, es decir, el valor del tiempo t que conduce, dada una tasa de interés, a la máxima rentabilidad por animal.

II . MATERIAL Y METODOS

2.1. Material

Los datos usados corresponden a pesos mensuales, en Kg., de cabezas de ganado bovino de las razas Abeerden Angus y Charolaise, desde el nacimiento hasta, como mínimo, los 3 años de edad. El régimen fue invernada.

- Abeerden Angus

Los animales fueron numerados de 1 a 76 (38 machos y 38 hembras).

- Charolaise

Se logró información correspondiente a 16 machos y 14 hembras; los mismos fueron numerados de 77 a 106.

2.2. Métodos

2.2.1. Características de las curvas ajustadas al crecimiento de los animales.

La elección del tipo de curva que se va a ajustar es importante. Diversos autores resaltan el hecho de que para representar el fenómeno de crecimiento se debe seleccionar una función asintótica y sigmoidea. Dentro de éstas la curva de Gompertz ha demostrado buenos resultados cuando se ha ajustado al crecimiento de ciertos organismos, tales como pollos y pinus caribea. En base a éstas consideraciones, se resolvió trabajar con la función de Gompertz; además de la citada función, se pensó ajustar otra que, si bien podía resultar no tan buena como la primera, se ajustara con mayor facilidad, desde el punto de vista computacional. Así, se utilizó la función cuadrática. Es importante hacer notar que ésta función no tiene realmente características de curva de crecimiento en toda su extensión; es sólo la rama izquierda de una parábola cóncava en relación al eje de las abscisas la que puede utilizarse para representar el crecimiento del animal a partir de cierta edad -en éste trabajo se estableció a partir del 13° mes-, cuando el animal ya fue destetado y pasó la fase de adaptación a la nueva alimentación.

La función de Gompertz, por otro lado, puede representar mejor el crecimiento de un animal, ya que éste presenta una fase inicial que puede responder a la expresión exponencial, pero a medida que el crecimiento continúa, los factores adversos aumentan en intensidad, hasta que en las últimas etapas del crecimiento el peso tiene tendencia a estabilizarse (la curva de crecimiento tiene una asíntota horizontal).

Por lo tanto, a partir de los valores observados de un animal (variable dependiente Y, en Kg) en distintas edades (variable independiente t, en meses), se ajustaron las funciones:

$$Y = A\, B^{C^{t}} \qquad (2.1)$$

e

$$Y = A + B\,t + C\,t^2 \qquad (2.2)$$

donde A, B y C son parámetros sujetos a las restricciones:

$A > 0$, B y $C \in (0;1)$ en (2.1)

$B > 0$ y $C < 0$ en (2.1)

a fin de que tengan características de una función de crecimiento.

El ajuste de la función cuadrática se efectuó por el método de mínimos cuadrados usual; el de la función de Gompertz se realizó mediante el método de STEVENS.

STEVENS (20) presentó un método para la estimación de los parámetros (y de las respectivas varianzas) de la regresión asintótica.

$$y = \alpha + \beta\rho^{x},\ 0 < \rho < 1 \qquad (2.3)$$

La estimación de los parámetros se realiza por el método de MC('); en las ecuaciones normales, se sustituyen α, β y ρ por sus estimadores: a, b y c respectivamente.

Inicialmente, se debe obtener una estimación c_o de c. Aquí, se utilizó un valor sugerido por la bibliografía específica: c = 0,92.

A partir de la estimación preliminar c_o de c, el método de MC permite obtener los estimadores correspondientes de los otros 2 parámetros (a y

---

(') mínimos cuadrados

b) y también el valor de la corrección Δc que se debe sumar a c_o para obtener una estimación más correcta de ρ.

Por tratarse de datos temporales en el material en estudio, se debió probar la presencia de autocorrelación de residuos mediante el estadístico d de DURBIN-WATSON.

2.2.2. La edad óptima de comercialización de bovinos

Sea $Y = F(t)$ (2.4)

la función de variación del peso de un animal (Y), en Kg, con el tiempo (t), en meses.

El ingreso (I) obtenido con la venta del animal en un instante t, estará dado por el producto:

$$I = p\,F(t) \qquad (2.5)$$

donde p = precio por Kg. de peso vivo del animal.

Considérese que existe una tasa de interés con capitalización continua igual a r por mes. El valor actual (en t = 0) del ingreso es:

$$I_o = p\,F(t)\,e^{-rt} \qquad (2.6)$$

Sea $C = f(t)$ la función del costo referente a un animal acumulado hasta un instante t, si no se considerasen los intereses sobre el capital empleado. Esa función incluye costos tales como salarios, el costo de alimentación, de medicamentos, etc. El valor de C crece evidentemente con el tiempo, es decir:

$$f'(t) = \frac{dc}{dt} > 0$$

Admitiendo que el productor tiene que hacer una inversión inicial K, en un instante T por animal; K puede ser, por ejemplo, el valor del ternero al inicio de la fase de recria. En t = 0, el valor de la inversión inicial es:

$$K\,e^{-rt} \qquad (2.7)$$

Los costos, para un animal determinado, en un intervalo de tiempo d t, a partir del instante T, están dados por:

$$dc = f'(t)\,dt \qquad (2.8)$$

Tomando en consideración los intereses, el valor de esos costos en el instante inicial (t = 0) se puede expresar:

$$f'(t)\, e^{-rt}\, dt \qquad (2.9)$$

Excluyendo la inversión K, el valor actual (en t = O) de los costos referentes a un animal, acumulados hasta el instante t será:

$$\int_T^t f'(t)\, e^{-rt}\, dt \qquad (2.10)$$

Sumando (2.7) y (2.10) se obtiene el valor actual (en t = O) del costo total (π) para el animal considerado, o sea:

$$\pi_o = \int_T^t f'(t)\, e^{-rt}\, dt + K e^{-rT} \qquad (2.11)$$

El valor del costo total en el instante t, es:

$$\pi = e^{rt} \int_T^t f'(t)\, e^{-rt}\, dt + K e^{r(t-T)} \qquad (2.12)$$

De acuerdo con (2.6) y (2.12), el valor actual (en t = O) del ingreso obtenido es:

$$Lo = Io - \pi o = pF(t) e^{-rt} - \int_T^t f'(t) e^{-rt} dt - Ke^{-rT} \quad (2.13)$$

Admitiendo que el empresario desea maximizar el valor actual de la rentabilidad neta, en el instante óptimo para la comercialización, se deberá tener:

$$\frac{d\, L\, o}{d\, t} = o \qquad (2.14)$$

y

$$\frac{d^2 L\, o}{d\, t^2} \quad 0 \qquad (2.15)$$

que son condiciones suficientes para un máximo de L_o.

Tomando en consideración (2.13), la condición (2.14) queda:

$$pF'(t)e^{-rt} - rpF(t)e^{-rt} - f'(t)e^{-rt} = 0$$

ó

$$pF'(t) = rpF(t) + f'(t) \qquad (2.16)$$

Aquí, se puede dar una interpretación económica: el animal no debe venderse por cuanto el valor del producto marginal $[pF'(t)]$ fue mayor que los intereses sobre el valor del producto $[rpF(t)]$ más el incremento del costo $[f'(t)]$.

La derivada segunda es:

$$\frac{d^2Lo}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left\{ e^{-rt}\left[pF'(t) - rpF(t) - f'(t)\right]\right\}$$

$$= -re^{-rt}\left[pF'(t) - rpF(t) - f'(t)\right] + e^{-rt}$$

$$\left[pF''(t) - rpF'(t) - f''(t)\right]$$

Considerando (2.16), el valor de la derivada segunda en el punto que maximiza el valor actual de la rentabilidad es igual al valor de:

$$Z = pF''(t) - rpF'(t) - f''(t)$$

Si en el punto en cuestión, el peso del animal aumentara a un ritmo decreciente, o sea:

$$F'(t) > 0 \quad y \quad F''(t) < 0 \qquad (2.17)$$

y el costo acumulado estuviese aumentando a un ritmo constante, el crecimiento

$$f''(t) \geqslant 0 \qquad (2.18)$$

haría a $Z < 0$ y estaría, por lo tanto, satisfecha la condición (2.15).

A continuación, se analizará el problema cuando la función (2.7) es del tipo:

$$C = f(t) = kt \qquad (2.19)$$

lo que significa que los costos por unidad de tiempo (k) se consideran independientes de la edad (y por lo tanto del peso) del animal.

De (2.19) se obtiene:

$$f'(t) = k \qquad (2.20)$$

y

$$f''(t) = 0$$

que satisface la condición (2.18).

Sustituyendo (2.20) en (2.16), la condición necesaria para maximizar el valor actual de la rentabilidad es:

$$pF'(t) = rpF(t) + k \qquad (2.21)$$

El valor actual del costo total es, en éste caso, de acuerdo con (2.12)

$$\Pi o = \int_T^t ke^{-rt}dt + Ke^{-rT}$$

$$\Pi o = \frac{k}{-r}\left[e^{-rt}\right]_T^t + Ke^{-rT}$$

$$\Pi o = \frac{k}{-r}\left(e^{-rt} - e^{-rT}\right) + Ke^{-rT} \qquad (2.22)$$

El valor del costo total en el instante t es:

$$\Pi = \Pi o\ e^{rt} = \frac{k}{r}\left(e^{-rT} - e^{-rt}\right)e^{rt} + Ke^{-rT}e^{rt}$$

$$\Pi = \frac{K}{r}\left(e^{r(t-T)} - 1\right) + Ke^{r(t-T)} \qquad (2.23)$$

De acuerdo con (2.13) y (2.22), el valor actual (en t = O) de la rentabilidad obtenida es:

$$Lo = Io - \Pi o = pF(t)e^{-rt} - \frac{k}{r}(e^{-rT} - e^{-rt}) - Ke^{-rT}$$

y también, el valor en T, o sea, el instante en que se realiza la inversión K, de esa misma rentabilidad es:

$$LT = pF(t)e^{-r(t-T)} - \frac{k}{r}\left(1 - e^{-r(t-T)}\right) - K \qquad (2.24)$$

Se analizará ahora como se presentan F(t) y F' (t), que aparecen en la relación (2.21), cuando la función de crecimiento es:

i) la función de Gompertz

ii) la función cuadrática

En el caso de la función de Gompertz:

$$F(t) = AB^{ct} \qquad (2.25)$$

se tiene:

$$F'(t) = A\ln B\ln CB^{ct}C^t \qquad (2.26)$$

y

$$F''(t) = A\ln B\ln CB^{ct}C^t(1 + C^t\ln B)$$

con $A > 0$ y B y C $\in (0;1)$, se tiene:

$\ln B < 0$

$\ln C < 0$

$F'(t) > 0$

y se tiene también:

$$F''(t) < 0 \qquad (2.27)$$

si $1 + C^t \ln B > 0$

o sea:

$$t > \frac{-\ln(-\ln B)}{\ln C} \qquad (2.28)$$

Así, las condiciones (2.17) estarán satisfechas si la edad t fue superior a la que corresponde al punto de inflexión de la curva de crecimiento.

Sustituyendo (2.25) y (2.26) en (2.21), se obtiene:

$$\phi(t) = pA(\ln B)(\ln C)B^{C^t}C^t - rpAB^{C^t} - rpAB^{C^t} - k = 0 \qquad (2.29)$$

Resolviendo ésta ecuación, sólo se pueden aceptar valores de t que satisfagan (2.28).

Se analizará ahora la ecuación (2.29) con el objeto de verificar como la edad óptima de comercialización (aquella que maximiza el valor actual de la rentabilidad neta) varía en función de los parámetros p, K y r.

Se verifica que:

$$\frac{dt}{dp} = \frac{AB^{C^t}\left[\ln B \ln C\, C^t - r\right]^2}{k \ln B \ln C\, C^t\left[r - (1 + C^t \ln B)\ln C\right]} \qquad (2.30)$$

$$\frac{dt}{dk} = \left\{pA \ln B \ln C\, B^{C^t}C^t\left[(1 + C^t\ln B)\ln C - r\right]\right\}^{-1} \qquad (2.31)$$

y

$$\frac{dt}{dr} = \left\{\ln B \ln C\, C^t\left[(1 + C^t\ln B)\ln C - r\right]\right\}^{-1} \qquad (2.32)$$

Considerando la condición (2.27) y que B y C $\in (0;1)$, se puede ver que (2.30) será positiva y (2.31) y (2.32) serán negativas.

Por lo tanto, se verifica que la edad economicamente óptima de comercialización (t) crece a medida que aumenta el precio por Kg vivo del animal (p) y decrece a medida que aumentan los costos mensuales (K) y la tasa de interés (r).

Se mostrará, a continuación, cómo hallar las raíces de la ecuación (2.29). Esta se puede escribir:

$$\phi(t) = MB^{C^t}C^t - NB^{C^t} - k = 0 \qquad (2.33)$$

donde:

$M = pA(\ln B)\ln C$

y

$N = rpA$

Desarrollando (2.33), de acuerdo con la fórmula de Taylor, se obtiene:

$$\phi(t) = \phi(to) + \Delta t \phi'(to) + \frac{1}{2!} (\Delta t)^2 \phi''(to) + \ldots$$

donde:

$$\Delta t = t - to$$

y

to es la estimación preliminar de la edad óptima de comercialización.

Admitiendo que la serie sea convergente, se puede escribir:

$$\phi(t) \simeq MB^{Cto}C^{to} - NB^{Cto} - k + \Delta t B^{Cto}C^{to} \ln C \left[M(1 + C^{to} \ln B) - N \ln B\right] = 0$$

donde:

$$\Delta t \simeq \frac{B^{Cto} (N - MC^{to}) + k}{B^{Cto}C^{to} (\ln C)\left[M (1 + C^{to} \ln B) - N \ln B\right]} \qquad (2.34)$$

Sustituyendo en (2.34), M y N por sus respectivos valores y los valores de los parámetros A, B y C por sus estimadores:

$$\hat{A} = e^{a}, \hat{B} = e^{b}, \hat{C} = C$$

se obtiene:

$$\Delta t \simeq \frac{pe^{a} (e^{b})^{cto} (r - bc^{to} \ln c) + k}{pbe^{a} \ln c\, (e^{b})^{cto} c^{to} \left[(1 + bc^{to}) \ln c - r\right]} \qquad (2.35)$$

Obtenida la corrección t, se calcula:

$$t'o - to + \Delta t$$

Se repiten los cálculos hasta que la corrección se puede despreciar, lográndose así una estimación de la edad óptima de comercialización $\hat{t}$.

Con respecto a la función cuadrática

$$F(t) = A + Bt + Ct^2 \qquad (2.36)$$

se tiene:

$$F'(t) = B + 2\,ct \qquad (2.37)$$

y

$$F''(t) = 2C$$

Para $C < 0$, se tiene:

$F''(t) < 0$

y para lograr $F'(t) > 0$, a fin de satisfacer las condiciones (2.17), se debe tener:

$B + 2\,Ct > 0$

ó

$$t < \frac{-B}{2C}, \text{ pues } C < 0 \text{ y } B > 0 \qquad (2.38)$$

Para determinar la edad de comercialización que maximiza el valor actual de la rentabilidad neta, se sustituye (2.36) y (2.37) en (2.21), obteniéndose:

$$p(B - rA) - k + p\,(2c - rB)t - rpct^2 = 0 \qquad (2.39)$$

Resolviendo la ecuación precedente de segundo grado en t, se puede aceptar la raíz que, de acuerdo con (2.38) sea menor que la abscisa del vértice de la parábola.

III . RESULTADOS

3.1. Ajuste de las funciones de Gompertz y cuadrática a los pesos de cada animal.

La funciones de Gompertz y cuadrática se ajustaron a los datos de cada animal considerado. Conviene recordar aquí que la función cuadrática se ajustó a partir del mes 13, de acuerdo a lo expresado en el punto II.

Con el objeto de ilustrar, se mostrarán los resultados obtenidos por un animal tomado al azar (el n° 23, macho, de la raza Abeerden Angus).

Las ecuaciones estimadas para ese animal fueron:

- Gompertz:

$$\ln \hat{y} = 6,5002 - 2,3884 \cdot 0,9374^{t}$$

ó

$$\hat{y} = 665,3 \cdot 0,0918^{\,0,9374t}$$

- Cuadrática

$$\hat{y} = -97,3 + 28,128t - 0,2986t^{2}$$

Para cada una de las funciones se calcularon:

i) desviación estándar, valor t de los parámetros, coeficiente de determinación (R^2), valores de F y el estadístico Durbin-Watson (DW) (véase cuadros 3.1.

ii) estimación de los pesos ($\hat{Y}$) (cuadro 3.2)

Se hace notar que las dos funciones no se pueden comparar directamente dado que el número de observaciones es distinto en cada una de ellas: se puede observar, a través del cuadro 3.1, que la función de Gompertz se ajusta mejor a los datos, de acuerdo a lo que se esperaba.

Mediante el mismo cuadro, se puede ver que para la función cuadrática $\hat{Y}_o$ es negativa. Ese valor es la estimación del animal al nacer. Se debe recordar que la función cuadrática, además de ser una curva no sigmoidea (sin punto de inflexión) se ajustó solamente a partir del mes 13 y nunca hasta el mes 60, para evitar distorsión de la curva; ello debido al hecho, ya mencionado, de que un arco de parábola sólo puede representar parte de la curva de crecimiento.

A través, también, del cuadro 3.1, se verificó que, con excepción del parámetro A de la función cuadrática, todos los demás valores de la prueba t para los estimadores de los parámetros son significativos al nivel del 1% de probabilidad. Obsérvese, asimismo, que los valores de F de los análisis de varianza de las regresiones son todos significativos al 1% de probabilidad y que los valores de la prueba Durbin - Watson, para las dos regresiones, son significativos para autocorrelación positiva.

Se intentó resolver el problema de autocorrelación positiva de los residuos corrigiendo los datos de pesadas mensuales de los animales mediante la multiplicación de los mismos por el índice estacional de precios; ello no llevó a modificaciones apreciables en la autocorrelación de los residuos, comprobado por la prueba Durbin - Watson.

Cuadro 3.1. Estimadores de los parámetros y de sus respectivas desviaciones estándares, pruebas t, coeficientes de determinación (R^2), pruebas F, pruebas Durbin-Watson (DW), y número de obser ciones, de las funciones de Gompertz y cuadrática ajustadas a los datos correspondientes al animal n° 23, macho, Abeerden Angus.

- G o m p e r t z -

a s(a) t(a)	b s(b) t(b)	ç = C s(c) t(c)	$\hat{A}$ s($\hat{A}$)	$\hat{B}$ s($\hat{B}$)	R^2 (%) F	DW N° de Obs.
6,5002 0,0603 107,7857	-2,3884 0,0538 -44,3842	0,9374 0,0045 208,1858	665,3 40,1	0,0918 0,0049	98,44 1.074,47	0,97 37

- C u a d r á t i c a -

$\hat{A}$ s($\hat{A}$) t($\hat{A}$)	$\hat{B}$ s($\hat{B}$) t($\hat{B}$)	$\hat{C}$ s($\hat{C}$) t($\hat{C}$)	R^2 (%) F	DW N° de obs.
-97,4 57,5 - 1,7	28,128 4,700 5,984	-0,2986 0,0897 3,3272	94,74 207,33	0,62 26

observ. todos los valores de las pruebas t son significativas al 1% de probabilidad, excepto el valor de t ($\hat{A}$) para la función cuadrática que resultó no significativo. A ese nivel los valores de las pruebas F son significativos y los valores correspondientes a la prueba Durbin-Watson son signigicativos para autocorrelación positiva.

Al comprobarse autocorrelación positiva de los residuos, no se encaró un nuevo ajuste de los datos, por cuanto, se pensó hasta que punto realmente tenía relevancia ese aspecto en un tipo de investigación como la presente. Dice JOHNSTON (16), pág. 206, al respecto: "en presencia de autocorrelación, los estimadores son no tendenciosos".

3.2. Ajuste de las funciones de Gompertz y cuadrática a los datos de todos los animales.

Se ajustaron las dos funciones usadas en éste trabajo a los datos de todos los animales, determinándose para cada una de ellas:

i) Función Gompertz
estimación de los parámetros (a, b, c, $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$) y sus respectivas desviaciones estándares, coeficientes de determinación, valores F, valores de la prueba Durbin-Watson y los valores de la edad (t_I) y el peso (Y_I) correspondientes a los puntos de inflexión.

ii) función cuadrática
estimadores de los parámetros ($\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$) y sus respectivas desviaciones estándares, coeficientes de determinación, valores F, valores DW.

Cuadro 3.2 : Pesos observados (Y) y las estimaciones de los pesos ($\hat{Y}$) del a nimal nº 23, macho, de raza Abeerden Angus, obtenidos por el a juste de las funciones de Gompertz y cuadrática.

t	Y	Y (Kg)		t	Y	Y (Kg)	
meses	(Kg)	Comp.	cuadrát.	meses	(Kg)	Comp.	cuadrát.
1	60	70,91	-	30	470	492,16	487,64
2	80	81,59	-	31	460	501,54	496,96
3	100	93,05	-	32	470	510,49	505,67
4	130	118,13	-	33	493	519,03	513,79
5	160	131,64	-	34	520	527,16	521,32
6	150	145,70	-	35	529	534,90	528,24
7	170	160,24	-	36	562	542,26	534,57
8	170	175,19	-	37	600	549,25	540,30
9	195	190,46	-				
10	200	205,98	-				
11	210	221,67	-				
12	200	237,47	-				
13	260	253,30	217,84				
14	240	269,09	237,91				
15	276	284,79	257,38				
16	293	300,33	276,25				
17	322	315,68	294,52				
18	318	330,77	312,20				
19	348	360,04	329,28				
20	368	374,15	361,64				
21	390	387,89	376,93				
22	429	401,22	391,62				
23	442	414,13	405,71				
24	452	426,61	419,21				
25	476	438,65	432,11				
26	480	450,25	444,41				
27	491	461,39	456,11				
28	470	472,09	467,22				
29	473	482,34	477,73				

Los valores de la prueba F resultaron todos significativos al nivel del 1% de probabilidad. A través de esos resultados se pudo observar que los valores de los coeficientes de determinación son relativamente altos, mostrando un buen ajuste de las funciones de Gompertz y cuadrática, siendo los valores de la primera casi siempre mayores. También, se pudo ver que los valores de la prueba de Durbin Watson casi siempre son significativos para autocorrelación positiva, en prueba unilateral, al nivel del 1% de probabilidad.

A traveś de los cuadors 3.3 y 3.4, en los cuales los animales aparecen agrupados, de acuerdo con la raza, y sexo, se pueden comparar los parámetros A y C de la función de Gompertz para diferentes grupos.

Los valores de A (asíntota), presentados en el cuadro 3.3, para los machos de las dos razas son siempre mayores que los correspondientes a las hembras. Haciendo comparaciones entre razas, se observan valores mayores de $\hat{A}$ para animales Charolaise.

Cuadro 3.3. : Medidas del parámetro A de la función de Gompertz

macho	hembra
Abeerden Angus	
718,0	457,5
Charolaise	
866,3	476,7

Mediante el cuadro 3.4 se puede hacer un análisis respecto al parámetro C de la función de Gompertz.

En la bibliografía específica consultada se cita un análisis de datos referentes a ganado lechero de diversas razas, encontrándose valores para el parámetro C casi constantes, con un valor medio de 0,92 aproximadamente; asimismo, el valor C parece no variar con la raza o el sexo, siendo, tal vez, característico de cada espe ie.

Cabe destacar que en éste trabajo, en donde se tomaron en consideración dos razas de ganado bovino, las conclusiones son un tanto diferentes a lo expresado precedentemente. Los valores medios de C son diferentes para las dos razas consideradas. Los resultados entre sexos difieren.

Cuadro 3.4 : Medias del parámetro C de la función de Gompertz

machos	hembras
Abeerden Angus	
0,9345	0,9184
Charolaise	
0,9209	0,8649

Sin embargo, obsérvese que los valores encontrados para C, tienen una variación relativamente pequeña. La importancia de que ese parámetro sea constante, radica en el hecho de que el problema de ajustar una función Gompertz se reduciría a ajustar una regresión lineal simple, es decir:

$$Y = A B^{C^t}$$

ó

$$\ln Y = \ln A + \ln B \, C^t$$

siendo C = constante, se tiene:

$$Y = \alpha + \beta X$$

donde:

$$Y = \ln Y$$
$$\alpha = \ln A$$
$$\beta = \ln B$$
$$X = C^t$$

Del análisis de los cálculos, se pudo observar que la ordenada del punto de inflexión de la curva de Gompertz es, en general, un poco superior a 1/3 del valor de la ordenada de la asíntota de la curva; el punto de inflexión debe corresponder, aproximadamente, a la pubertad del animal.

3.3. Determinación de la edad óptima de comercialización

Para la determinación de la estimación de la edad económica de venta ($\hat{t}$), se usaron las ecuaciones (2,34) y (2.38) del punto anterior.

Para la determinación de los costos mensuales se tomaron los datos del cuadro 3.5; obsérvese en el mismo que esos costos arrojaron un valor de ₳ 6,23 por cabeza por mes. Inicialmente, se pensó en trabajar con un valor de K igual a ₳ 20,00 (restando ₳ 13,77 para remunerar al factor tierra). Como existen tierras de distinto valor, se utilizaron tres costos distintos: ₳ 14, 17 y 20.

Para trabajar con un valor de p (precio del Kg vivo por animal) referente al mismo mes en el que se dieron los costos mensuales, se calculó una media ponderada (de acuerdo con la producción mensual) de los precios medios de novillo; se obtuvo una media igual a ₳ 3,87 (se usó igual valor para machos y hembras). La tasa de interés se tomó igual a 10% mensual.

Luego de determinarse la edad económicamente óptima de venta, se calculó el beneficio (B) en el instante en el cual el animal tiene un año de edad, sin descontar la inversión inicial (K), que es, en éste análisis, el valor de un ternero con esa edad. Para ello, se utilizó la ecuación (2.23) del punto anterior, la cual para Gompertz es:

$$B = L_T + K = p.\ \hat{A}\, \hat{B}^{\hat{C}^t} e^{-r(t-T)} - \frac{K}{r} (1 - e^{-r(t-T)}$$

y para la cuadrática:

$$B = L_T + K = p(\hat{A} + \hat{B}t + \hat{C}t^2)e^{-r(t-T)} - \frac{K}{r}(1 - e^{-r(t-T)}$$

Cuadro 3.5 : Estimación de los costos mensuales para engorde de ganado bovino con un período medio considerado de 14 meses.

Item	A/ cabeza
Costo directo	
- mano de obra variable	20,64
- mano de obra permanente	18,06
- alimentación	11,59
- vacunación y medicamentos	20,95
- pérdidas (')	3,35
- gastos diversos	1,57
- depreciación ('')	11,03
Costo directo total	87,19
Costo directo/mes	6,23

(') muertes eventuales

('') del capital en forma de máquinas, equipos, etc.

Usando un valor de K igual a A 331,58, que es el valor medio de un ternero correspondiente a los mismos meses usados para el cálculo de p; se puede también calcular el beneficio actual descontado de la inversión inicial, tal como aparece en el cuadro 3.6.

Cuadro 3.6 : Edad óptima de venta en meses (t), peso a la misma edad (Y_t), valor del beneficio actual (cuando el animal tenía un año) sin descontar la inversión inicial (B) y descontando inversión inicial (BA) para el animal n° 23 y para 3 valores distintos de costo mensual (K) usando las funciones de Gompertz y cuadrática.

GOMPERTZ					CUADRATICA			
K	$\hat{t}$	Y_t	B	BA	$\hat{t}$	Y_t	B	BA
14	29,5	467	684	353	29,1	469	696	364
17	27,2	441	639	308	27,3	448	651	319
20	24,9	413	600	268	25,5	426	610	279

En el trabajo original se encuentran los valores de $\hat{t}$, Y_t y B, obtenidos con los distintos costos y con las dos funciones usadas para los datos estudiados. Cuando para la función de Gompertz no aparecen resultados es porque el valor de t obtenido fue menor que la edad correspondiente al punto de inflexión, según lo expresado en (2.29). Tampoco aparecen los valores de t menores de 12, edad del ternero.

En el cuadro 3.7 aparecen las medias de $\hat{t}$ e $\hat{Y}_t$ para los animales agrupados de acuerdo con la raza y el sexo, sólo para la función de Gompertz que se ajustó mejor.

Cuadro 3.7 : Medidas de la edad económicamente óptima de venta ($\hat{t}$), en meses y su respectivo peso ($\hat{Y}_t$) en Kg, mediante la función de Gompertz para K igual a ₳ 17.

Abeerden Angus	
machos	hembras
$\hat{t}$ ($\hat{Y}_t$)	$\hat{t}$ ($\hat{Y}_t$)
27,5 (491)	19,5 (300)
Charolaise	
machos	hembras
$\hat{t}$ ($\hat{Y}_t$)	$\hat{t}$ ($\hat{Y}_t$)
28,5 (660)	17,3 (387)

Es interesante desatacar que en las dos razas, si bien el desarrollo de las hembras es más lento, no se debe esperar más tiempo para la venta (con el objeto de obtener más peso) a fin de maximizar el beneficio actual; la edad óptima para la venta resultó siempre menor que para los machos. Dado que las hembras no se disponen para engorde, sino para procrear, las edades "óptimas" de venta para hembras, aquí determinadas no sirven de base para la toma de decisiones; éstos resultados pueden servir, en forma indirecta, para comparaciones con animales de desarrollo más lento.

El análisis efectuado consideró solamente el costo mensual de ₳ 17, pero, se puede ver en el cuadro 3.6 que la variación de ese costo a ₳ 14 y ₳ 20, en general, altera apenas en más, menos 2 meses la edad económicamente óptima de venta.

Se puede concluir, que el criterio utilizado en la práctica, de comercializar el ganado bovino cuando el mismo alcanza un peso de 450 Kg, no importando el tiempo utilizado para que ese animal alcance ese peso, puede, indudablemente, acarrear perjuicios al productor.

A través de los resultado obtenidos, obsérvese que la edad de venta que maximiza el beneficio depende, principalmente, de la forma de la curva de desarrollo de cada animal. Por supuesto, que para maximizar en beneficio, no sólo se debe conocer la curva de crecimiento, sino que además se deberá conocer la situación del mercado, o sea, pronosticos sobre la evolución de los precios (6, 7 y 8).

Se puede así expresar, que el peso no es por sí sólo, un indicador ideal del momento óptimo de venta del ganado bovino, pero es innegable que aporta un importante elemento de juicio al productor respecto a como maximizar beneficios.

IV . CONCLUSIONES

Como se expresara en la introducción de éste trabajo, el mismo tuvo dos objetivos básicos:

i) ajustar dos tipos de funciones de datos referentes al crecimiento de ganado bovino. Tales funciones fueron Gompertz y cuadrática.

ii) determinar la edad economicamente óptima de comercialización de los animales, o sea, el valor del tiempo t que conduce, dada una tasa de interés, al máximo beneficio actual por animal.

Para lograr lo expresado se utilizaron datos de pesadas mensuales correspondientes a 106 cabezas de ganado bovino: 76 de ellas correspondientes a la raza Abeerden Angus y 30 de raza Charolaise.

La función de Gompertz fue ajustada por el método de STEVENS (20) y la cuadrática a través del método minimo cuadrático usual.

Para la estimación de la edad óptima de comercialización, se utilizó el criterio expuesto en el punto II; esa estimación, cuando se ajusta a una función Gompertz, se calcula mediante la expresión:

$$\Delta t \simeq \frac{pe^{a}\,(e^{b})^{c^{to}}\,(r - bc^{to}\ln c) + K}{pbe^{a}\,(\ln c)\,(e^{b})^{c^{to}}\,c^{to}\left[(1 + bc^{to})\ln c - r\right]}$$

donde:

p : precio por Kg vivo de los animales

r : tasa de interés

K : costos mensuales por animal

a, b, c : parámetros

t : estimador de la edad óptima de comercialización

t_0: estimador preliminar de t

$t = t - t_0$: corrección

El proceso es iterativo. Obtenida la corrección Δt, se calcula $t_0' = t_0 + \Delta t$, repitiéndose los cálculos hasta que la corrección se puede depreciar, lográndose así, la estimación de la edad óptima de comercialización.

Para la función cuadrática, la ecuación para esa misma estimación es:

$$p\ (B - rA) - K + p\ (2c - rB)\ t - rpct^2 = 0$$

donde: A, B, C son los parámetros

En base a los resultados obtenidos, se puede llegar a las siguientes conclusiones:

1) La función de Gompertz se ajustó a los datos de crecimiento de ganado bovino, teniendo la misma todas las características de una función de crecimiento animal.

2) La función cuadrática, conduce a una edad óptima aproximadamente igual a la obtenida mediante la ecuación de Gompertz, presentando como ventaja ser más facilmente ajustable.

3) El parámetro C de la función de Gompertz tiene valores relativamente constantes dentro de cada raza.

4) La ordenada del punto de inflexión de la curva de Gompertz ajustada es, en general, un poco superior a 1/3 del valor de la ordenada de la asíntota de la curva. Se debe recordar que el punto de inflexión corresponde, aproximadamente, a la pubertad del animal y que la ordenada de la asíntota representa el peso potencial del animal adulto.

5) La edad óptima de comercialización para los animales machos de la raza Abeerden Angus, se estimó en 27,5 meses, con un peso de 491 Kg. Estos resultados se obtuvieron considerando un costo mensual por animal igual a ₳ 17, un precio por Kg vivo de ₳ 2,32 y una tasa de interés mensual del 10%.

6) La edad óptima de comercialización fue un poco alterada, usándose un costo mensual de ₳ 14 ó ₳ 20, variando, en general, en más menos 2 meses respectivamente.

7) Por todo lo expresado, el criterio usado en la práctica, de comercializar un animal cuando el mismo llega a 450 Kg, lleva a obtener menor rentabilidad que si se determina la edad de comercialización, de acuerdo con la curva de crecimiento de cada animal.

- BIBLIOGRAFÍA -

1 . Abraham, B; J. Ledolper (1983): statistical methods for forecasting. J. Wiley.

2 . Agha, M. (1971): A direct method for fitting linear combinations of exponentials. Biometrics, 27: 399 - 413.

3 . Amer, F.A.; W. Williams (1957): Leaf area growth in pelargonium zonale. Ann. Bot., 21:339 - 42.

4 . Bertalanffy, L. von (1957): Quantitative laws in metabolism and growth. Q. Rev. Biol., 32: 217 - 31.

5 . Box, G; G. Tiao (1975): Intervention Analysis with Applications to Economic and En vironmental Problems. Journal of the Am. St. Assoc., 70: 70 - 79.

6 . Cantatore de Frank, N. (1982): Series de tiempo, números índices y medidas de concentración. Edit. Tesis Bs. As.

7 . Cantatore de Frank, N (1985): Series de tiempo uni y bidimensionales - el problema de la identificación - Edit. Hemisferio Sur Bs. As.

8 . Cantatore de Frank, N. (1986): Filtración adaptada: una técnica de pronóstico. Edit. Hemisferio Sur Bs. As.

9 . Carter, H.O.; H. Hartley (1986): A variance formula for Marginal Productivity Estimates Using the Coob-Douglas Function. Econometrica, 26: 306 -13.

10 . Chiang, A.C. (1977): Fundamental methods of mathematical economics. Mc. Graw Hilli; N. York.

11 . Chow, G. (1960): Test of equality between sets of coefficients in two linear regressions. Econometrica, 28: 591 - 605.

12 . Eckles, C.H. (1959): Dairy Cattle and Milk production. Mc Millan Co.

13 . Hammond, J. (1960): Fertility and growth in farm animals: general principles. <u>Farm animals</u>, 3a. ed. Edward Arnold Ltd.

14 . Harley, A. (1981): Time Series Models. Philip Allan. Oxdington. Oxford.

15 . Heady, E.O.; J.L. Dillon (1961): Agricultural Production Functions. Ames, Iowa State University Press.

16 . Johnston, J. (1972): Métodos econométricos. Mc Graw Hill.

17 . Richards, F.J. (1969): A flexible growth function for empirical use. J. Exp. Bot., 10: 290 - 300. Oxford.

18 . Riffenburgh, R.H. (1966): On grawth parameter estimation for early life stages. Biometrics, 22: 162 - 78.

19 . Snapp, R.; A.L. Neumann (1976): The importance of age and sex in growth and finishing Beef Cattle. 5ta. ed. J. Wiley.

20 . Stevens, W.L. (1951): Asymptotic regression. Biometrics, 7: 247 - 67.