SOBRE LA CONSTANCIA DE LA UTILIDAD

MARGINAL DEL INGRESO

Por Alberto PORTO *

LA PLATA, Septiembre de 1986

* Profesor del Departamento de Economía de la Universidad Nacional de La Plata y del Programa de Posgrado de Capacitación e Investigación en Análisis de Políticas Públicas del Instituto Di Tella.

Hace más de cuatro décadas -exactamente en 1942- P.A. Samuelson publicó un artículo destinado a analizar las implicancias del "aparentemente inocente" supuesto de constancia de la utilidad marginal del ingreso [1/]. Al reestudiar algunos aspectos de la teoría de la utilidad [2/] me ha parecido que no están suficientemente claras en la literatura las implicancias desarrolladas por Samuelson, por lo que creo se justifica volver sobre el tema. El trabajo se divide en dos partes; en la primera se presentan las restricciones que sobre las funciones de demanda impone el supuesto de constancia de la utilidad marginal del ingreso -en este aspecto se reelaboran algunos resultados ya conocidos debidos a Samuelson; en la segunda parte se comentan las implicancias que algunos autores han asignado a la constancia de la utilidad marginal del ingreso.

I - CONSTANCIA DE LA UTILIDAD MARGINAL DEL INGRESO

1. Supóngase que la función de utilidad ordinal de un consumidor viene dada por

$$U = U(q_1, \ldots\ldots, q_m) \qquad (1)$$

que se supone contínua y diferenciable dos veces. El consumidor posee un ingreso determinado en dinero (y) y es receptor de precios en el mercado de cada bien; actúa de modo de maximizar el índice de utilidad. Analíticamente el problema consiste en maximizar (1) sujeta a la restricción.

$$y - \sum_{i=1}^{m} p_i \cdot q_i = 0 \qquad (2)$$

Formando la función auxiliar

$$L = U(q_1, \ldots q_m) + \lambda\left(y - \sum_i p_i \cdot q_i\right)$$

e igualando a cero las derivadas parciales con respecto a las q_i y λ se obtienen las condiciones de primer orden,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = U_i - \lambda . p_i = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = y - \sum_i p_i \cdot q_i = 0 \qquad (5)$$

La condición de segundo orden requiere que los hessianos orlados alternen el signo, siendo el primero positivo,

$$\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & -p_1 \\ U_{21} & U_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix} > 0 \;, \quad \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & -p_1 \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & -p_2 \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & -p_3 \\ -p_1 & -p_2 & -p_3 & 0 \end{vmatrix} < 0, \ldots \qquad (6$$

Si se cumple (6), resolviendo (4) y (5) se obtienen,

$$q_i^* = q_i(p_1, \ldots, p_m, y) \qquad (7)$$

$$\lambda^* = \lambda(p_1, \ldots, p_m, y) \qquad (8)$$

2. Reemplazando (7) en (1) se obtiene la función de utilidad indirecta,

$$U^* = U(p_1, \ldots, p_m, y) \qquad (9)$$

Aplicando el teorema envolvente,

$$\frac{\partial U^*}{\partial p_i} = -\lambda^* \cdot q_i^* \qquad i = 1, \ldots n \qquad (10)$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial y} = \lambda^* \quad (= \text{utilidad marginal del ingreso}) \qquad (11)$$

3. Como la función (8) es homogénea de grado menos u no en precios e ingreso, [3/] por el Teorema de Euler se tiene que [4/]

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \lambda}{\partial p_i} \cdot p_i + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \cdot y \equiv -\lambda \qquad (12)$$

La expresión (12) permite arribar a un primer resultado: λ no puede ser constante con respecto a todos los precios y el ingreso pues - esto contradice la identidad de Euler.

Las dos hipótesis alternativas que se han formulado - son: (1) la utilidad marginal del ingreso es constante con respecto a cambios en todos los precios; (2) la utilidad marginal de algún bien es constante con respecto a cambios en los precios de todos los otros bienes y el ingreso. Se a nalizarán a continuación las implicancias de los dos supuestos alternativos.

4. Por el teorema de Young de indiferencia en cuanto al orden de diferenciación surge que

$$\frac{\partial^2 U^*}{\partial p_i \partial y} = \frac{\partial^2 U^*}{\partial y \partial p_i} \qquad i = 1, \ldots n \qquad (13)$$

Hallando las derivadas parciales segundas cruzadas en (10) y (11), utilizando (13) y reordenando, se obtiene

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial p_i} + q_i \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right) \frac{1}{\lambda} = -\frac{\partial q_i}{\partial y} \qquad i = 1, \ldots n \qquad (14)$$

5. Primer hipótesis: la utilidad marginal del ingreso es constante con respecto a cambios en todos los precios.

A partir de (12) se obtiene

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} \cdot \frac{y}{\lambda} = -1 \qquad (15)$$

y utilizando (14) y (15),

$$-\frac{\partial \lambda}{\partial y} \cdot \frac{y}{\lambda} = \frac{\partial q_i}{\partial y} \cdot \frac{y}{q_i} = 1 \qquad i = 1, \dots n \qquad (16)$$

La primer hipótesis implica que las elasticidades -ingreso de la demanda por cada bien son unitarias- o sea, el consumo de cada -- bien es exactamente proporcional al ingreso.

6. Segunda hipótesis: la utilidad marginal de algún - bien (designado en este caso como numerario), es constante con respecto a cambios en los precios de todos los otros bienes y el ingreso. Considerando al - bien q_1 como numerario y suponiendo que el consumidor dispone inicialmente la cantidad $\bar{q}_1$ de ese bien, cuyo precio se iguala a la unidad, la restricción (2) asume la forma

$$p_1 \cdot \bar{q}_1 = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot q_i \qquad (2')$$

En esta segunda hipótesis se supone

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p_j} = 0 \qquad j = 2, \dots n \qquad (17)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0 \qquad (18)$$

Utilizando (14), (17) y (18) se obtiene

$$\frac{\partial q_i}{\partial y} = 0 \qquad j = 2, \dots n \tag{19}$$

Reemplazando (17) y (18) en (12) surge que

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p_1} \cdot \frac{p_1}{\lambda} = -1 \tag{20}$$

y utilizando (14), (18) y (20),

$$\frac{\partial q_1}{\partial y} = \frac{1}{p_1} = 1 \quad (\text{dado } p_1 = 1) \tag{21}$$

En conclusión, la segunda hipótesis implica que todo el incremento del ingreso se gasta en el numerario (ecuación 21)) siendo las elasticidades ingreso de todos los otros bienes iguales a cero (por (19)).

7. Representación gráfica. Para un modelo de dos bienes la implicancia de la primer hipótesis se representa en el Gráfico N° 1; la línea de consumo-ingreso es una recta que pasa por el origen; si entre

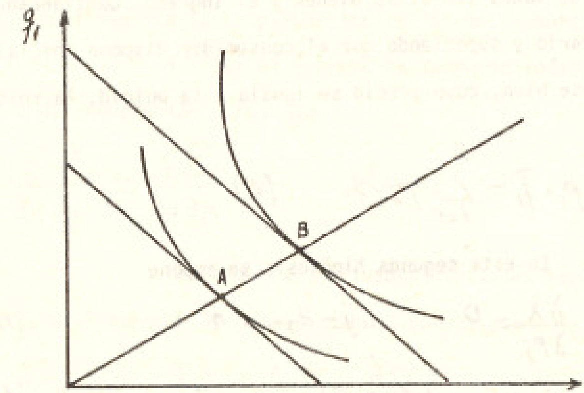

Gráfico N° 1

//

los puntos A y B el ingreso del consumidor aumenta un 50 %, las cantidades consumidas de los bienes q1 y q2 aumentarán en esa misma proporción.

La implicancia de la segunda hipótesis se representa en el Gráfico N° 2; las curvas de indiferencias son paralelas verticalmente; el movimiento del punto A al punto B implica que q2 permanece sin cambios y

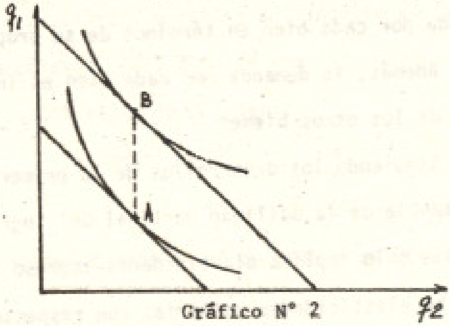

Gráfico N° 2

que todo el incremento del ingreso se gasta en el numerario.[5/]

II - COMENTARIOS SOBRE ALGUNOS RESULTADOS EN LA LITERATURA

1. P.A. Samuelson (1947) expresa: "... la utilidad marginal del ingreso no puede ser invariante si cambian el ingreso y todos los precios". "A lo sumo, la utilidad marginal de ingreso podría ser independiente de todas menos una de estas (n+1) magnitudes. Estamos autorizados a igualar a cero n derivadas parciales primeras, pero no (n+1). ¿Cuál n elegimos?. Obviamente, podemos optar entre (n+1) posibilidades diferentes. Una de ellas comprende la constancia de la utilidad marginal del ingreso con respecto a n precios, pero no con respecto al ingreso. He sostenido en otro lugar que

este es el caso puro de Marshall. Otras posibilidades implican la constancia de la utilidad marginal del ingreso con respecto al ingreso y (n-1) precios. ... Es la segunda hipotesis sobre la constancia"[6/] . Más adelante agrega que la primer hipótesis ó "hipótesis Marshalliana pura", implica que la elasticidad-ingreso de la demanda por cada bien debe ser unitaria y que la elasticidad precio de la demanda por cada bien en términos de su propio precio debe ser igual a menos uno. Además, la demanda por cada bien es independiente de cambios en los precios de los otros bienes [7/].

Siguiendo los desarrollos de la primera parte de este trabajo surge que constancia de la utilidad marginal del ingreso en el sentido de la primer hipótesis solo implica elasticidades-ingreso unitarias para todos los bienes, pero no elasticidades unitarias con respecto al propio precio ni independencia de la demanda de cada bien con respecto al precio de los otros bienes. Si a la constancia de la utilidad marginal del ingreso (primer hipótesis) se agrega el supuesto de utilidades independientes o aditivas (que en conjunto constituirían la "hipótesis Marshalliana pura") entonces sí el resultado es de elasticidades-ingreso unitarias y elasticidades-precio iguales a menos uno para todos los bienes.

Lo más sorprendente es que la publicación de los "Fundamentos ..." es posterior al artículo de 1942 en el que claramente se exponía: "la combinación de los supuestos de constancia de la utilidad marginal del ingreso e independencia de utilidades implica que la elasticidad de la demanda será siempre unitaria" [8/] [9/] (se refiere a la elasticidad con respec to al propio precio para todos los bienes; se trata de constancia de la utilidad marginal del ingreso en el sentido de la primer hipótesis).

2. E. Silberberg (1978) sostiene que si la función de utilidad es homotética, entonces λ es independiente de los precios de todos los bienes; o sea la utilidad marginal del ingreso sería constante en el sentido de la primer hipótesis 10/. Esta es una afirmación incorrecta como puede demostrarse con el contraejemplo siguiente.

Siendo
$$U = q_1 \cdot q_2$$
$$y = p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2$$

resultan las siguientes funciones de demanda y de utilidad marginal del ingreso,

$$q_1 = \frac{y}{2 \cdot p_1} \qquad (22)$$
$$q_2 = \frac{y}{2 p_2} \qquad (23)$$
$$\lambda = \frac{y}{2 \cdot p_1 \cdot p_2} \qquad (24)$$

En este caso la función de utilidad es homotética (y homogénea), las funciones de demanda (22) y (23) son de elasticidad-ingreso igual a la unidad y, sin embargo, de (24) surge que

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p_i} \neq 0 \qquad i = 1,2$$

Lo correcto es que si λ es constante en el sentido de la primer hipótesis, entonces las elasticidades-ingreso de la demanda por todos los bienes son unitarias. Pero elasticidades-ingreso unitarias para todos los bienes no implican necesariamente λ constante 11/.

NOTAS DE PIE DE PAGINA

1/ - A partir de la utilización por A. Marshall en los "Principios de Economía" se encuentra repetidamente en la literatura teórica y empírica sobre la teoría de la demanda el supuesto de constancia de la utilidad marginal del ingreso. La implicancia de una de las interpretaciones se encuentra en "Valor y Capital" de J.R. Hicks quien concluye: "En verdad, es una de esas simplificaciones de genio de las que se encuentran varios ejemplos en la obra de Marshall. Los economistas continuarán usándolas, pero pisarán terreno mucho más firme si supieran con exactitud que es lo que están descuidando". (J.R. Hicks (1968), Cap. III, pág. 29). Hubo que esperar hasta el artículo de Samuelson para contar con un tratamiento riguroso y exhaustivo de las implicancias de la constancia de la utilidad marginal del ingreso.

2/ - En el Seminario Interno de Teoría Económica del Instituto de Investigaciones Económicas de la Universidad Nacional de La Plata (1985) a cuyos participantes agradezco los comentarios realizados a una versión preliminar.

3/ - Utilizando (8) y (4) resultan:

$$\lambda(tp_1, \dots tp_m, ty) = \frac{U_i}{t \cdot p_i} = t^{-1} \cdot \lambda(p_1, \dots p_m, y) \qquad \begin{matrix} i = 1, \dots n \\ t > 0 \end{matrix}$$

Si todos los precios y el ingreso se duplican, como las funciones de demanda (7) son homogéneas de grado cero, las cantidades demandadas de los bienes no se modifican; por consiguiente, tampoco cambian las utilidades marginales (Ui) - Como λ es igual a las utilidades marginales ponderadas de cada bien, su valor se habrá reducido a la mitad.

4/ - Para simplificar la notación se omite el asterisco indicativo de que las funciones resultan de la solución de un problema de máximo.

5/ - Cfr. con la representación de Fernández Pol. (1971).

6/ - Cita de la versión castellana, pg. 197. Subrayado en el original.

7/ - "It is a mere exercise to show that the first, or pure Marshallian, hipothesis implies that the income elasticity of demand for each good must be unitary, and the price elasticity of demand for each good in terms of its own price must equal minus one. Moreover, the demand for each good is independent of changes in the prices of all other goods". (pág. 193).

8/ - "... the combined assumptions of constancy of the marginal utility of income and independence of utility imply that the elasticity of demand be always unity". (Stiglitz ed. (1966), p. 82).

9/ - Si la utilidad marginal del ingreso es constante en el sentido de la primer hipótesis y las utilidades son independientes ó aditivas --- ($U_{ij} = 0$), derivando las condiciones de primer orden (4) y (5) con - respecto a un precio, p.ej.: p_1, se obtiene:

$$U_1'' \cdot \frac{\partial q_1}{\partial p_1} = \lambda$$

$$-p_1 \frac{\partial q_1}{\partial p_1} = q_1$$

de donde surge que la elasticidad precio de la demanda $\eta_1 = -\frac{\partial q_1}{\partial p_1} \cdot \frac{q_1}{p_1}$ es igual a la unidad e igual a la inversa de la elasticidad de la utilidad marginal del bien q_1 ($\varepsilon_1 = -\frac{U_1''}{U_1'} \cdot q_1$)

10/ - "... this suggests that the marginal utility of money income λ^M should be independent of relative prices for these utility functions. Indeed, this is the case". (pg. 359; se refiere a las funciones homotéticas): "Thus, for homothetic indifference maps, the marginal utility of money income depends only on income and the utility level, irrespective of which bundle is being consumed. Thus, the relative prices being faced don't matter". (pg. 360).

11/ - El supuesto de constancia de λ implica no solo las restricciones ya - vistas sobre las funciones de demanda, sino también la imposición de una forma definida para la función de utilidad directa. En el caso más simple de independencia de utilidades, si se utiliza la función

$$F = a \cdot k_1 \cdot \log q_1 + a \cdot k_2 \cdot \log q_2$$

surgen las mismas funciones de demanda que las dadas por (22) y (23) - del texto, obtenidas a partir de $U = q_1 \cdot q_2$ (lo que ocurre debido a que F es una transformación monótona de U con valores apropiados de a, k_1, k_2); pero ahora resulta

$$\lambda = \frac{a}{y}$$

y en este caso sí se verifica que $\frac{\partial \lambda}{\partial p_i} = 0$ ($i = 1,2$). Obsérvese que $\lambda = \frac{a}{y}$ es la única forma que puede adoptar una función homogénea de grado menos uno en una sola variable.

P.A. Samuelson (1942): "Constancy of the marginal utility of income", Studies in Mathematical Economics and Econometrics: In Memory of Henry Schultz", Chicago, pags. 75-91. Reimpreso en J.E. Stiglitz (ed.) "The collected scientific papers of Paul A. Samuelson", The M.I.T. Press, 1966, Vol. I, pags. 37-53.

?.A. Samuelson (1947): "The Fundations of Economic Analysis", Harvard University Press. Versión en castellano: "Fundamentos del Análisis Económico", El Ateneo, Bs.As., 1966. (segunda edición). Las citas del texto y notas de pie de nuestro trabajo no han sido modificadas en la Enlarged Edition, Harvard University Press, 1983.

A. Marshall (1957): "Principios de Economía", Aguilar, Madrid.

J.R. Hicks. (1968): "Valor y Capital". Fondo de Cultura Económica. México.

J.E. Fernández Pol (1971): Nota sobre el significado económico de la ecuación de Pareto, Económica, N° 2, Mayo-Agosto. Reproducido en J.C. de Pablo y F.V. Tow (coordinadores): "Lecturas de microeconomía por Economistas Argentinos", Ed. El Coloquio., Bs.As., 1976. Pgs. 217-225.

E. Silberberg (1978): "The Structure of Economics. A Mathematical Analysis" Mc. Graw Hill.

H.R. Varian (1980): "Análisis Microeconómico". Bosch Editor, Barcelona.

---oOo---