# UN MODELO DE EQUILIBRIO GENERAL KEYNESIANO.

Guillermo Escudé (*)

(*) Instituto de Investigaciones Económicas de la UBA.

# UN MODELO DE EQUILIBRIO GENERAL KEYNESIANO


## Resumen

Construimos un modelo multisectorial (no-monetario) de equilibrio general walrasiano orientado hacia la macroeconomía. Esbozamos una demostración de existencia de equilibrio general walrasiano siguiendo lineamientos tradicionales (Teorema 1). Seguidamente, modificamos el modelo de tal modo que el mercado de trabajo se ajusta exclusivamente por racionamiento (ya sea de la oferta o de la demanda). Cuando un agente es racionado, su demanda efectiva difiere, en general, de su demanda nocional en los restantes mercados. Ello se elabora formalmente introduciendo la hipótesis de decisión dual utilizada por Clower (1965). Después mostramos condiciones suficientes para que, con precios y salario fijos, exista un vector de niveles de producción en la frontera eficiente de la economía que iguale las ofertas efectivas con las demandas efectivas en todos los mercados (Teorema 2). Luego formulamos una condición suficiente para que tal Equilibrio de Precios Fijos sea único (Teorema 3). En la última sección suponemos que el salario es fijo pero los precios flexibles. Demostramos que, para cualquier salario superior a cierto mínimo, puede encontrarse un vector de precios y niveles de producción que no sólo igualan las ofertas efectivas a las demandas efectivas sino que, además, dados los precios, las empresas maximizan beneficios en el conjunto de producción factible (Teorema 4). Denominamos Equilibrio General Keynesiano a esta última situación.

# UN MODELO DE EQUILIBRIO GENERAL KEYNESIANO

> "We need to throw over the second postulate of the classical doctrine and to work out the behaviour of a system in which involuntary unemployment in the strict sense is possible."
>
> J.M.Keynes,

La teoría del equilibrio general bajo condiciones competitivas que hoy tiene vigencia es una puesta a punto de la formulada por Léon Walras en sus Eléments d'économie politique pure. Su idea básica es que bajo ciertos supuestos de comportamiento por parte de individuos y empresas y ciertos supuestos con respecto a la tecnología, es posible encontrar precios para todos los bienes y servicios que compatibilicen los planes de todos los agentes económicos: que despejen todos los mercados. A partir de la obra fundamental de Keynes se vislumbró la necesidad de adaptar la teoría para permitirle tratar situaciones, sobre todo de corto plazo, en las que la existencia de rigideces en los precios llevan a que la compatibilización de los planes se efectúe por vías más tortuosas que el simple movimiento de los precios.

Durante muchos años éste fue el dominio casi exclusivo de la macroeconomía. En ella se maneja el ingreso real como variable independiente, a la par con variables-precio como el nivel general de precios, el salario y la tasa de interés. Sin embargo, este proceder carecía de una sustentación firme en la teoría económica que pretende partir del comportamiento de los agentes económicos individuales.

En las dos últimas décadas, sin embargo, ha ido tomando ímpetu una tendencia que procura superar este hiato entre la macroeconomía y la microeconomía. A ella pueden adscribirse, entre otros, los nombres de Patinkin, Clower, Leijonhufvud, Malinvaud, Benassy y Negishi. En este nuevo planteo se suele invertir la tradicional hipótesis marshalliana de que en el corto plazo los precios se ajustan mucho más rápidamente que las cantidades. Los ajustes de precios (o, al menos, de ciertos precios) pueden producirse lentamente y, en cambio, la compatibilización de los planes de los agentes en el corto plazo puede lograrse mediante ajustes en las cantidades. En estos ajustes, el racionamiento de las ofertas y las demandas suele jugar un papel fundamental. En modelos estáticos de corto plazo, es frecuente suponer que los precios son totalmente rígidos (lo que Hicks (1965) llamó "método de Precios Fijos").

El presente trabajo se inspira en esta corriente. En él construimos primero un modelo multisectorial (no-monetario) de equilibrio general walrasiano orientado hacia la macroeconomía. Esbozamos una demostración de existencia de equilibrio general walrasiano siguiendo lineamientos tradicionales (Teorema 1). Seguidamente, modificamos al modelo de tal modo que el mercado de trabajo se ajusta exclusivamente por racionamiento (ya sea de la oferta o de la demanda). Cuando un agente es racionado, su <u>demanda efectiva</u> difiere, en general, de su <u>demanda nocional</u> en los restantes mercados. Ello se elabora formalmente introduciendo la <u>hipótesis de decisión dual</u> utilizada por Clower (1965). Después mostramos condiciones suficientes para que, con precios y salario fijos, exista un vector de niveles de producción en la frontera eficiente de la economía que iguale las ofertas efectivas con las demandas efectivas en todos los mercados (Teorema 2). Luego formulamos una condición suficiente para que tal <u>Equilibrio de Precios Fijos</u> sea único (Teorema 3). En la última sec-

ción suponemos que el salario es fijo pero los precios flexibles. Demostramos que, para cualquier salario superior a cierto mínimo, puede encontrarse un vector de precios y niveles de producción que no sólo igualan las ofertas efectivas a las demandas efectivas sino que, además, dados los precios, las empresas maximizan beneficios en el conjunto de producción factible (Teorema 4). Denominamos Equilibrio General Keynesiano a esta última situación.

Sean x e y vectores y A una matriz. Normalmente se desprenderá del contexto el carácter de fila o de columna de un vector. Se usará la siguiente notación en el texto:

| | |
|---|---|
| $e = (1,\ldots,1)$ | $A_i$ : i-ésima fila de A |
| $e_i = (0,\ldots,1,0,\ldots,0)$ | $A^j$ : j-ésima columna de A |
| $x \leq y : x \leqq y,\ x \neq y$ | $\overline{=}$ : igualdad por definición |
| $x \leqq y : x \leqq y,\ x \neq y$ | ${}^tA$ : traspuesta de A. |

## I. Un modelo de Equilibrio General Walrasiano

En esta sección tanto empresas como familias son propietarias de stocks de bienes y de trabajo. El trabajo del cual dispone la empresa fue contratado en un período precedente y es susceptible de ser utilizado durante el período en curso. La familia, en cambio, dispone de una cierta cantidad de tiempo vital libre en el período presente que ya no puede enajenar y una cierta cantidad de tiempo vital libre en el período próximo susceptible de ser vendida como trabajo potencial. La producción y el consumo del período en curso está limitada por los stocks que empresas y familias poseen.

Las ofertas y demandas que se forman en el período en curso deben permitir llevar a cabo los planes de consumo y producción que se tienen para el período próximo. Sin embargo, estos últimos no se tratarán explícitamente en el modelo. Los planes de consumo y producción para el próximo período estarán reflejados implícitamente

en las preferencias de los agentes con respecto a los stocks finales del período en curso. Las transacciones se realizan al final del período. Se supone que tanto las empresas como las familias se comportan como tomadores de precios.

Existen n procesos de producción, uno para cada uno de los n bienes. Tales procesos presentan rendimientos constantes a escala y proporciones fijas entre los insumos. Cada proceso utiliza bienes y trabajo para producir un único bien. Sea $A \in R_+^{nxn}$ la matriz de insumo-producto. El elemento $A_{ij}$ denota la cantidad de j que debe consumirse productivamente para producir una unidad de i. Sea $t \in R_+^n$ el vector de coeficientes directos de trabajo. El siguiente supuesto se usará en lo sucesivo:

S1 a) A es conexa y productiva; b) $t > 0$.

Cada familia y cada empresa tiene un sistema de preferencias representable mediante una función de utilidad ordinal que verifica:

S2 U es a) continua, b) monótona creciente y c) estrictamente cuasicóncava.

Con la finalidad de evitar una serie de complicaciones técnicas introduciremos dos supuestos ad hoc. Por un lado, suponemos que la demanda de bienes y trabajo por parte de cada familia y cada empresa está restringida a un conjunto compacto y convexo que contiene el origen, $X^i$ y $Y^k$, respectivamente. Por otro lado suponemos que cada familia y cada empresa es propietaria de un vector de stocks de bienes y trabajo estrictamente positivo, $a_o^i$ y $a_o^k$, respectivamente (aunque estos stocks pueden ser arbitrariamente pequeños).

A. Las familias

Hay I familias que demandan bienes y ofrecen trabajo. Son,

en conjunto, propietarias de las empresas. $\theta_{ik}$ es la participación de i en la empresa k. La suma de tales coeficientes sobre los i es igual a la unidad, para todo k. Sea $b^k(p)$ el beneficio distribuido por k cuando los precios de los bienes son $p_1,\ldots,p_n$, el salario es $p_{n+1}$ y $p = (p_1,\ldots,p_n,p_{n+1}) = (p^1,p_{n+1})$. El ingreso por beneficios de i es $b^i(p) = \sum_k b^k(p)\theta_{ik}$. El (n+1)-ésimo elemento de $a^i_o$ denota la cantidad máxima de tiempo vital disponible de i en el período próximo (y que puede ser vendido al final del período en curso, junto con los demás elementos de $a^i_o$).

Las familias determinan sus funciones de demanda de bienes $S^i(p)$ y de oferta de trabajo $L^i(p)$ (o, alternativamente, de demanda de tiempo no-laboral $a^i_{o(n+1)}-L^i(p)$) mediante el siguiente proceso de optimización:

$$(1) \qquad \max_{(S^i,L^i)\in X^i} U^i(S^i,a^i_{o(n+1)}-L^i) \quad \text{sujeto a}$$

$$(S^i,a^i_{o(n+1)}-L^i)p = a^i_o p + b^i(p).$$

Utilizando el Teorema del Máximo puede demostrarse que si cada $b^k(p)$ es una función continua, la solución $(S^i(p),L^i(p))$ de (1) es también una función continua. El vector de demandas netas de bienes y trabajo de i es entonces $(S^i(p)-a^i_{oI},-L^i(p))$, donde $a^i_{oI}$ es el vector que incluye los primeros n elementos de $a^i_o$.

B. Las empresas

Hay K empresas, cada una de las cuales puede producir los n bienes. Cada empresa utiliza sus stocks para producir durante el período en curso y al final del mismo ofrece sus productos y demanda stocks finales $a^k_1$ para tener al comienzo del período próximo. Sea $q^k$ el vector de producción bruta de k. Como las transacciones se realizan al final del período la producción de k está restringida por sus stocks iniciales. En consecuencia, $q^k$ debe pertenecer al conjunto

compacto y convexo

$$Q^k = \{q^k \in R_+^n / \; q^k(A,t) \leq a_o^k\}.$$

Los beneficios de k son $q^k Bp$ donde $B \equiv (I-A,-t)$. La empresa determina qué proporción de sus beneficios va a retener al determinar su demanda de stocks finales. Si $a_1^k p > a_o^k p$, está reteniendo una parte de sus beneficios. Suponemos que el resto, $q^k Bp + (a_o^k - a_1^k)p \equiv b^k(p)$, se distribuye entre los propietarios. También suponemos que la empresa no se descapitaliza, o sea, que $a_1^k p \geq a_o^k p$. Luego k determina su nivel de producción del período en curso, la estructura de su demanda de stocks finales y la parte de los beneficios que va a retener en la forma de stocks (y, por diferencia, la parte que va a distribuir) mediante el siguiente proceso de optimización:

$$(2) \qquad \max_{(q^k, a_1^k) \in Y^k} U^k(\, q^k Bp,\, a_1^k) \quad \text{sujeto a} \quad a_o^k p \leq a_1^k p \leq a_o^k p + q^k Bp,$$

donde $Y^k = Q^k \times A^k$. Es sencillo verificar que (2) equivale al siguiente proceso de optimización secuencial:

$$(3) \qquad \max_{a_1^k \in A^k(p)} \; \max_{q^k \in Q^k} U^k(\, q^k Bp,\, a_1^k) \quad \text{donde}$$

$$A^k(p) = \{a_1^k \in A^k / \; a_o^k p \leq a_1^k p \leq a_o^k p + q^k Bp\} .$$

Por S2, $U^k$ resulta estrictamente creciente. Luego la solución de la primera etapa de (3) es la correspondencia $q^k : P \to Q^k$ donde

$$q^k(p) = \{q^k \in Q^k / \; q^k Bp \text{ es máximo}\}, \qquad P \equiv \{p \in R_+^{n+1} / \; ep = 1\} .$$

(La normalización de precios adoptada vale igualmente para las familias.) Se desprende de la definición de $q^k(p)$ que aquéllos procesos que rinden beneficios positivos (si existen) deben ser operados al máximo, o sea, hasta agotar algún recurso. Por el contrario, aquéllos que rinden beneficios negativos no deben ser operados.

Utilizando nuevamente el Teorema del Máximo puede demostrarse que $q^k(p)$ es una correspondencia semi-continua superiormente en P y que $a_1^k(p)$ (obtenida en la segunda etapa de (3)) y $b^k(p)$ son funciones continuas en P. La oferta neta de bienes y trabajo de k es, en

definitiva, $q^k(p)B + a_o^k - a_1^k(p)$.

C. Equilibrio General Walrasiano

Sea $E_g(p)$, $g=1,\ldots,n+1$, la demanda excedente de g cuando los precios-salario son p. Sea $E(p)$ el vector formado por tales elementos. Por lo visto precedentemente

$$E(p) = (S(p),-L(p)) - q(p)B + a_1(p) - a_o$$

donde S, L, q, $a_o$ y $a_1$ denotan las sumas de $S^i$, $L^i$, $q^k$, $a_o^k + (a_{oI}^i, 0)$ y $a_1^k$ sobre sus respectivos superíndices. Dado el carácter estrictamente creciente de las funciones de utilidad, la solución del problema de elección de la familia debe cumplir la restricción presupuestaria con igualdad, o sea

$$(S^i(p),a_{o(n+1)}^i)-L^i(p))p = a_o^i p + \sum_k \left[q^k(p)B + a_o^k - a_1^k(p)\right] p\alpha_{ik}.$$

Agregando sobre i se obtiene

$$E(p)p = 0. \tag{4}$$

Lema (Gale-Nikaido) Sea Z un subconjunto compacto de $R^m$ y $P = \{p \in R_+^m / \; ep = 1\}$. Sea $F:P \to Z$ una correspondencia semi-continua superiormente tal que para todo $p \in P$, $F(p)$ es no-vacío, convexo y satisface $F(p)p \leq 0$. Entonces existe un $p^* \in P$ tal que $F(p^*)$ contiene un elemento $z^* \leq 0$.

La verificación de que se cumplen todas las condiciones del Lema es inmediata. Luego, existe un $p^* \in P$ tal que $E(p^*)$ contiene un elemento no-positivo. O sea, existe un $q^* \in q(p^*)$ tal que

$$(S(p^*),-L(p^*)) + a_1(p^*) \leq q^*B + a_o.$$

Como $E(p^*)p^* = 0$, $E(p^*) \leq 0$ y $p^* \geq 0$, es evidente que si $p_g^* > 0$ debe darse $E_g(p^*) = 0$. Tenemos entonces una situación en la que no hay demanda excedente (positiva) en ningún mercado y sólo puede haber oferta excedente si el precio del bien correspondiente es nulo, o sea, si se ha convertido en un bien gratuito. Esta situación cons-

tituye un Equilibrio General Walrasiano. En éste, tanto las familias como las empresas maximizan utilidad sujetas a sus restricciones "naturales", las empresas maximizan beneficios y sólo puede haber desempleo si el salario es nulo. Podemos sintetizar los resultados de esta sección en el siguiente teorema.

Teorema 1 Si para todo i y toda k, $X^i$ y $Y^k$ (respectivamente) son compactos, convexos y contienen al 0, $a_o^i$ y $a_o^k$ son estrictamente positivos y se cumplen S1 y S2 entonces existe un $p^* \in P$ tal que $q(p^*)$ contiene un vector $q^*$ tal que

a) la demanda no supera a la oferta en ningún mercado,

b) la oferta puede superar a la demanda en un mercado sólo si el precio del bien (o trabajo) correspondiente es nulo,

c) si un proceso da pérdida no se opera, o sea, el elemento correspondiente de $q^*$ es nulo,

d) cada empresa opera los procesos que rinden beneficios positivos (si existe alguno) hasta que se le agota algún stock.

## II. Un modelo con racionamiento en el mercado de trabajo

En lo sucesivo suponemos, para simplificar, que las familias no tienen stocks de bienes y que las empresas no tienen stocks de trabajo. Luego $a_o^k \in R_+^n$ para todo k. En cambio sólo exigimos que $a_o$ sea estrictamente positivo (no cada $a_o^k$ particular). Como las empresas no tienen stocks de trabajo deben utilizar durante el período en curso el trabajo adquirido en el período. Puede suponerse, entonces, que las transacciones se realizan al comienzo del período sobre la base de los planes de producción que formulan las empresas. De tal modo, el trabajo puede transferirse al comienzo del período aunque todos los pagos y la transferencia de los bienes producidos durante el período se realicen al final del mismo. Ahora, entonces, $a_{o(n+1)}^i$ deno-

ta el tiempo vital disponible por i en el período en curso y $p_{n+1}$ el salario por período vencido.

Siempre que un conjunto C sea definido mediante una desigualdad vectorial $\leq$, llamaremos $\dot{C}$ al conjunto definido del mismo modo con la salvedad de reemplazar $\leq$ por $\dot{\leq}$. De tal modo, $\dot{C}$ denota la "frontera eficiente" de C. Sean

$$Q^k = \{q \in R^n_+ / \; q^k A \leq a^k_o\}, \quad Q = \{q \in R^n_+ / \; qA \leq a_o\}.$$

Supongamos que cada empresa elige un $q^k \in Q^k$. Dado $q^k$, k determina la función continua $a^k_1(q^k, p)$ según

$$(5) \quad \max_{a^k_1 \in A^k} U^k(q^k Bp, a^k_1) \text{ s.a } a^k_o p^1 \leq a^k_1 p^1 \leq a^k_o p^1 + q^k Bp.$$

Los beneficios distribuidos por k son

$$(6) \quad b^k(q^k, p) = q^k Bp + a^k_o p^1 - a^k_1(q^k, p) p^1$$

y los ingresos no-laborales de i son

$$(7) \quad b^i(q^1, \ldots, q^K, p) = \sum_{k=1}^{K} b^k(q^k, p) \alpha_{ik}.$$

Cada familia determina sus demandas según

$$(8) \quad \max_{(S^i, L^i) \in X^i} U^i(S^i, a^i_{o(n+1)} - L^i) \quad \text{s.a} \quad S^i p^1 \leq L^i p_{n+1} + b^i(q^1, \ldots, q^K, p)$$

lo que determina las funciones continuas $S^i(q^1, \ldots, q^K, p)$, $L^i(q^1, \ldots, q^K, p)$. Vamos a suponer que la reasignación de un mismo nivel de producción agregada entre las empresas particulares no afecta al ingreso no-laboral de cada i.

S3 Para todo i, $b^i = b^i(q, p)$ donde $q = \sum_{k=1}^{K} q^k$.

Sobre la base de este supuesto, (8) determina $S^i = S^i(q, p)$, $L^i = L^i(q, p)$, y en el agregado se tiene $S = S(q, p)$, $L = L(q, p)$.

Como tanto q como L(q, p) se determinan en forma descentralizada, la demanda de trabajo, qt, puede diferir de la oferta, L(q, p). Suponemos que si hay discrepancia, ésta se resuelve por racionamiento. Si $qt > L(q, p)$, las empresas son racionadas en sus niveles de

producción (lo cual implica un racionamiento en sus demandas de trabajo). Si $qt < L(q,p)$ las familias son racionadas en sus ofertas de trabajo. Suponemos que el racionamiento es proporcional. Para formalizar estas ideas, definamos:

$$\mu(q,p) = \begin{cases} qt/L(q,p) & \text{si } qt < L(q,p) \\ 1 & \text{si } qt = L(q,p) \\ \text{la solución de } L(\frac{1}{\mu}q,p) = \frac{1}{\mu}\,qt & \text{si } qt > L(q,p) \end{cases}$$

$$\bar{q}^k(q,p,q^k) = \begin{cases} q^k & \text{si } \mu(q,p) \leq 1 \\ q^k/\mu(q,p) & \text{si } \mu(q,p) > 1 \end{cases}$$

$$\bar{L}^i(q,p) = \begin{cases} L^i(q,p) & \text{si } \mu(q,p) \geq 1 \\ \mu(q,p)L^i(q,p) & \text{si } \mu(q,p) < 1. \end{cases}$$

Agregando sobre k, de la definición de $\bar{q}^k(q,p,q^k)$ se obtiene

$$\bar{q}(q,p) = \begin{cases} q & \text{si } \mu(q,p) \leq 1 \\ q/\mu(q,p) & \text{si } \mu(q,p) > 1. \end{cases}$$

Agregando sobre i, se obtiene una definición análoga para $\bar{L}(q,p)$.

Más adelante explicitaremos el supuesto de que L es no-creciente con q. Es éste lo que arriba nos permitió definir a $\mu(q,p)$ de modo unívoco en el caso $qt > L(q,p)$. Obsérvese que en (8) está implícito que las familias propietarias conocen los planes de producción e inversión (y, por lo tanto, de distribución de beneficios) de las empresas en las que participan. Este supuesto es tanto más realista cuanto más concentrada esté la propiedad y cuanto menos independencia exista entre la dirección de la empresa y los accionistas.

El siguiente lema demuestra que el proceso de racionamiento definido "despeja" efectivamente al mercado de trabajo.

Lema 1 Para todo $(q,p)$, $\bar{q}(q,p)t = \bar{L}(\bar{q}(q,p),p)$.

Demostración Si $qt \leq L(q,p)$ se tiene

$\bar{q}(q,p)t = qt = \mu(q,p)L(q,p) = \bar{L}(q,p) = \bar{L}(\bar{q}(q,p),p)$.

Si $qt > L(q,p)$ se tiene

$\bar{q}(q,p)t = (1/\mu(q,p))qt = L((1/\mu(q,p))q,p) = \bar{L}(\bar{q}(q,p),p)$. QED.

Dados los niveles racionados de producción y de oferta de trabajo, las empresas y las familias determinan sus demandas efectivas de bienes $\bar{a}_1^k$ y $\bar{S}^i$, respectivamente. Si $\mu(q,p) = 1$, ni las empresas ni las familias son racionadas, por lo cual sus demandas efectivas coinciden con sus demandas nocionales, las soluciones de (5) y (8), respectivamente. Si $\mu(q,p) > 1$, las familias no son racionadas en sus ofertas de trabajo pero sí lo son las empresas en sus niveles de producción. Esto incide sobre los beneficios distribuidos. Si $\mu(q,p) < 1$, las empresas no son racionadas pero las familias sí. Definamos el ingreso efectivo de i como

(9) $\quad y^i(q,p) = \bar{L}^i(q,p)p_{n+1} + b^i(\bar{q}(q,p),p).$

Luego la demanda efectiva de i, $\bar{S}^i(q,p)$, es la solución de

(10) $\quad \max_{S^i \in X_I^i} U^i(S^i, a^i_{o(n+1)} - L^i) \quad s.a \quad S^i p^1 \leq y^i(q,p)$

donde $X^i = X_I^i x [0, a^i_{o(n+1)}]$. Cuando $\mu(q,p) = 1$, como $y^i(q,p) = L^i(q,p)p_{n+1} + b^i(q,p)$, $\bar{S}^i(q,p)$ coincide con la demanda nocional dada por (8).

Si $\mu(q,p) \leq 1$, las empresas no son racionadas. Luego sus demandas efectivas coinciden con sus demandas nocionales, dadas por (5). En cambio, si $\mu(q,p) > 1$, las empresas determinan $\bar{a}_1^k(q,p,q^k)$ según:

(11) $\quad \max_{a_1^k \in A^k} U^k(\hat{q}^k Bp, a_1^k) \quad s.a \quad a_o^k p^1 \leq a_1^k p^1 \leq a_o^k p^1 + \hat{q}^k Bp, \quad \hat{q}^k = \bar{q}^k(q,p,q^k).$

En el agregado se tiene $\bar{a}_1 = \bar{a}_1(q^1, \ldots, q^K, p)$. Sin embargo, así como hicimos con el ingreso no-laboral de las familias (S3), vamos a suponer que las reasignaciones de la producción entre las empresas no afecta a la demanda efectiva agregada de stocks finales.

S4 $\quad \bar{a}_1 = \bar{a}_1(q,p).$

III. Equilibrio con Precios Fijos

En esta sección suponemos que los precios y el salario son fijos y, más aún, son positivos y rinden beneficios no-negativos en todos los procesos. Para ser concretos, supongamos que p pertenece al conjunto

$$C = \left\{p \in R_+^{n+1} / \; Bp \geq 0,\; p_{n+1} \geq \varepsilon > 0,\; eBp + p_{n+1} = 1\right\}$$

donde los precios están normalizados mediante un numerario compuesto y el salario real es mayor o igual que un cierto mínimo $\varepsilon$ dado exógenamente. Se supone que las unidades han sido elegidas de modo tal que $e(A,t)<(e,1)$. Alternativamente, puede tomarse cualquier vector $x \geq 0$ que satisfaga $x(A,t)<(x,1)$, e.g., el vector dominante de izquierda de A.

Dado un $p \in C$, nuestro primer objetivo será encontrar un q que anule la demanda efectiva excedente agregada, o sea, que verifique

(12) $$\bar{S}(q,p) = \bar{G}(q,p)$$

donde $\bar{G}$ es la oferta meta agregada de las empresas:

$$\bar{G}(q,p) \equiv \bar{q}(q,p)(I-A) + a_o - \bar{a}_1(q,p).$$

Para ello, definamos al conjunto factible Q(p) (y su correspondiente frontera eficiente $\dot{Q}(p)$; véase la Figura 1 en la pág. 22):

$$Q(p) = \left\{q \in R_+^n / \; q(A,t) \leq (a_o, L(q,p))\right\}.$$

Obsérvese que si $q \in Q(p)$, se tiene $\mu(q,p) \leq 1$, por lo cual $\bar{q}(q,p)=q$. Luego si restringimos nuestra búsqueda a Q(p) debemos buscar un q que verifique

(13) $$\bar{S}(q,p) = G(q,p)$$

donde $G(q,p) \equiv q(I-A) + a_o - \bar{a}_1(q,p)$. Este hecho permitirá soslayar la no-diferenciabilidad de $\bar{q}$ y, por lo tanto, de $\bar{G}$, en los puntos en que $\mu(q,p) = 1$. A su vez, el supuesto S6 nos garantizará la diferenciabilidad de G con respecto a q, lo cual nos será de utilidad en el Lema 3.

S5 a) $a_o > 0$ y para todo $(q,p) \in R^n_+ \times C$, $L(q,p) > 0$,

b) $q^1 \geq q^2 \Rightarrow L(q^1,p) \leq L(q^2,p)$,

c) $L(q,p)$ es cóncava con respecto a $q$.

Una interpretación posible de a) es que el $\varepsilon$ utilizado en la definición de C es lo suficientemente grande como para que la oferta agregada de trabajo sea positiva en todo C. Una consecuencia de a) es que $Q(p)$ tiene interior no-vacío, o sea, contiene algún $q > 0$ que no está en $\dot{Q}(p)$. Una consecuencia de c) es que, como $-L$ es convexa con respecto a $q$, también lo es $qt-L(q,p)$ (ya que la suma de funciones conserva la convexidad; cfr. Rockafellar (1970), Teorema 5.2). Luego $Q(p)$, como intersección de conjuntos convexos, es convexo (ibid., Teorema 4.6).

Lema 2 a) Para todo $p \in C$ y todo $q$ tal que $\mu(q,p) \leq 1$, $\bar{S}(q,p)p^1 = G(q,p)p^1$

b) Para todo $p \in C$ y todo $q \geq 0$ se tiene $\bar{S}(q,p)p^1 > 0$.

Demostración

a) Agregando las restricciones presupuestarias de las familias y teniendo en cuenta que deben cumplirse con igualdad por el carácter estrictamente creciente de $U^i$ se obtiene (por (6),(7),(9),S3 y S4):

$$(14)\quad \bar{S}(q,p)p^1 = y(q,p) = \bar{L}(q,p)p_{n+1} + \sum_{i \in I} b^i(\bar{q}(q,p),p) =$$

$$= \bar{L}(q,p)p_{n+1} + \bar{q}(q,p)Bp + (a_o - \bar{a}_1(q,p))p^1 =$$

$$= \left[\bar{L}(q,p) - \bar{q}(q,p)t\right]p_{n+1} + \left[\bar{q}(q,p)(I-A) + a_o - \bar{a}_1(q,p)\right]p^1 .$$

Como $\mu(q,p) \leq 1$ se tiene $\bar{q}(q,p) = q$. Por el Lema 1, entonces, el primer corchete se anula y se obtiene la igualdad buscada.

b) Agregando las restricciones de las empresas (de (11)) evaluadas en $\bar{a}^k_1(q,p,q^k)$ se obtiene:

$$(15)\qquad \bar{q}(q,p)Bp + (a_o - \bar{a}_1(q,p))p^1 \geq 0.$$

Además, por S5a), $qt > 0$ y $p_{n+1} > 0$, se tiene

$$(16)\qquad \bar{L}(q,p)p_{n+1} > 0.$$

Luego por la penúltima igualdad de (14) y por (15) y (16) se tiene el resultado buscado. QED.

S6 a) $\bar{a}_1(q,p)$ es diferenciable con respecto a q en una región rectangular compacta $D \subset R^n_+$ tal que $\forall p \in C$, $Q(p) = D$,

b) $G(0,p)=0$ y para todo $(q,p) \in D \times C$, $G(q,p) \geq 0$,

c) Para todo $(q,p) \in D \times C$, $\frac{\partial \bar{a}_1}{\partial q} \geq 0$ y la raíz dominante de $A+\frac{\partial \bar{a}_1}{\partial q}$ es menor que 1,

d) Para todo $(q,p) \in \dot{Q}(p) \times C$, $\bar{S}(q,p) \in G(D,p)$.

b) nos asegura que las demandas de stocks finales $\bar{a}_1$ son tales que las empresas nunca se convierten en demandantes netos de bienes y que cuando se abstienen de producir retienen sus stocks. c) pide que la demanda efectiva agregada de stocks de las empresas sea no-decreciente con q pero no tan creciente como para que $A+\frac{\partial \bar{a}_1}{\partial q}$ deje de ser productiva. d) es un supuesto conjunto sobre D, $\bar{a}_1$ y $\bar{S}$. Dice que para cualquier $q \in \dot{Q}(p)$, $\bar{S}(q,p)$ debe poder ser satisfecho con la oferta neta $G(q',p)$ correspondiente a algún $q' \in D$.

Como p está fijo, en el siguiente lema consideramos a G como función de q solamente.

Lema 3 Dado un $p \in C$, si se cumplen S6 a),b) y c) se verifican:

a) $G(q,p)$ es globalmente inversible en D,

b) $G^{-1}$ es monótona creciente en $G(D,p)$,

c) $G^{-1}$ es continua en $G(D,p)$.

Demostración La matriz jacobiana de G es $J_G(q) = I-A-\frac{\partial \bar{a}_1}{\partial q}$. Por S6c) tiene elementos no-diagonales no-positivos. Además, como $A+\frac{\partial \bar{a}_1}{\partial q}$ tiene raíz dominante menor que 1, $J_G(q)$ tiene inversa no-negativa (cfr. Nikaido (1968), Teorema 7.1(ii)). Esto implica que todos los menores principales de $J_G(q)$ son positivos, o sea, que es una P-matriz (ibid., Teoremas 6.3 y 6.1). Por el Teorema de Univalencia Global de Gale-Nikaido (ibid., Teorema 20.6), $G(q,p)$ resulta globalmente inversible

en D y $G^{-1}$ monótona creciente en G(D,p), o sea,

(17) $G(q^1,p) \geq G(q^2,p) \Rightarrow q^1 \geq q^2$.

(17) y la univalencia global de G implican, además, que G es estrictamente creciente en el sentido que

(18) $G(q^1,p) \geq G(q^2,p) \Rightarrow q^1 \geq q^2$.

Pues, dado el antecedente, si fuera $q^1=q^2$ se tendría $G(q^1,p)=G(q^2,p)$, una contradicción.

Con respecto a c), como G es continua y D es compacto, la existencia de $G^{-1}$ implica su continuidad por el Teorema 4.29 de Apostol (1976). QED.

Lema 4 Para todo $p \in C$, $\dot{Q}(p)$ es homeomorfo a $S = \left\{q \in R^n_+ / \; qe = 1\right\}$.

Demostración Considérese la función definida en S

$f(q) = g(q)q$, donde $g(q) = \min\left\{\frac{a_{o1}}{qA^1}, \ldots, \frac{a_{on}}{qA^n}, \frac{L(q,p)}{qt}\right\}$.

Por S5a), $g(q) > 0$. Puede comprobarse, entonces, que $f(q) \in \dot{Q}(p)$. Además, f es continua pues lo es L. Su inversa,

$$f^{-1}: \dot{Q}(p) \to S \;, \quad f^{-1}(q) = q/qe,$$

es también continua. QED.

Lema 5 Si Y es no-vacío, compacto y homeomorfo a un conjunto convexo S y $f:Y \to Y$ es una función continua, entonces f tiene un punto fijo.

Demostración Sea $g:S \to Y$ un homeomorfismo. Luego $g^{-1}fg:S \to S$ es una función continua definida en un conjunto no-vacío, compacto y convexo. Por el Teorema de Brouwer (cfr. Nikaido (1968), Teorema 4.3) existe un $s \in S$ tal que $(g^{-1}fg)(s) = s$. Pero entonces $f(g(s))=g(s)$ y $g(s)$ es un punto fijo de f. QED.

Teorema 2 Si se verifican S1-S6 entonces, dado un $p \in C$, existe un $\hat{q} \in \dot{Q}(p)$ que verifica $L(\hat{q},p)=\hat{q}t$ y $S(\hat{q},p)=G(\hat{q},p)$.

Demostración La primera igualdad vale para todo elemento de Q(p). Esto se desprende del Lema 1 y el hecho de que si $q \in Q(p)$ se tiene

$\bar{q}(q,p)=q$. Tomemos un $q\in\dot{Q}(p)$. Como $(a_o,L(q,p))>0$ debe ser $q \geq 0$. Luego por el Lema 2b) se tiene $\bar{S}(q,p)p^1>0$. Como $\bar{S}(q,p)\geq 0$ y $p^1>0$ debe ser $\bar{S}(q,p) \geq 0$. Además, por S6d), $\bar{S}(q,p)\in G(D,p)$, o sea, $G^{-1}(\bar{S}(q,p))\in D$. Definamos $f(\lambda) = G^{-1}(\lambda\bar{S}(q,p))$ para $\lambda\in R_+$. Vamos a demostrar que existe un único $\lambda\in(0,+\infty)$ tal que $f(\lambda)\in\dot{Q}(p)$.

Por definición de G se tiene

$$\lambda\bar{S}(q,p) = G(f(\lambda)) = f(\lambda)(I-A)+a_o-\bar{a}_1(f(\lambda),p)$$

de donde

$$f(\lambda) = \lambda\bar{S}(q,p)-a_o+f(\lambda)A+\bar{a}_1(f(\lambda),p). \tag{19}$$

Por (18) y S6b),

$$\lambda\bar{S}(q,p) \geq 0 \Rightarrow f(\lambda) \geq 0 \Rightarrow f(\lambda)A \geq 0.$$

Luego, como $\bar{a}_1(f(\lambda),p)\geq 0$, se desprende de (19) que

$$f(\ ) \geq \lambda\bar{S}(q,p) - a_o.$$

Por ser $\bar{S}(q,p) \geq 0$ se deduce que al menos un elemento de $f(\lambda)$ tiende a infinito cuando $\lambda$ tiende a infinito. Definamos

$$g(\lambda) = f(\lambda)(A,t) - (a_o,L(f(\lambda),p)).$$

Como f es creciente y tiene al menos un elemento que tiende a infinito con $\lambda$, A es convexa, $t>0$ y L es no-creciente en q, puede observarse que $g(\lambda)$ es estrictamente creciente y tiende a infinito con $\lambda$ en cada uno de sus elementos. Además, $g(0) = -(a_o,L(0,p))<0$ (por S5a)) y g es continua pues f y L lo son (Lema 3c)). Aplicando el Teorema de Bolzano, a cada $g_i(\lambda)$ le corresponde un único $\lambda_i>0$ tal que $g_i(\lambda_i)=0$. Tómese $\lambda=\min_i\lambda_i$ y se tendrá por construcción $g(\lambda) \geq 0$, o sea, $f(\lambda)\in\dot{Q}(p)$.

Definamos la transformación

$$F:\dot{Q}(p) \to \dot{Q}(p), \qquad F(q) = G^{-1}(\lambda(q)\bar{S}(q,p))$$

donde hemos explicitado la dependencia del $\lambda$ del párrafo precedente con respecto a q (también depende de p pero como éste es fijo no nos preocupa). Puede utilizarse el Teorema 2 del Capítulo VI.3 de Berge (1959) para comprobar la continuidad de $\lambda(q)$. $\bar{S}$ es continua y

$G^{-1}$ también (Lema 3c)). Luego F es continua en $\dot{Q}(p)$, un dominio novacío, compacto y homeomorfo a un convexo (Lema 4). Como se cumplen todas las condiciones del Lema 5, existe un $\hat{q}\epsilon\dot{Q}(p)$ que verifica

$$\hat{q} = F(\hat{q}) = G^{-1}(\lambda(\hat{q})\bar{S}(\hat{q},p)),$$

o sea,

$$G(\hat{q},p) = \lambda(\hat{q})\bar{S}(\hat{q},p).$$

Por lo tanto,

$$G(\hat{q},p)p^1 = \lambda(\hat{q})\bar{S}(\hat{q},p)p^1.$$

Del Lema 2 se desprende que $\lambda(\hat{q})=1$ por lo cual $G(\hat{q},p)=\bar{S}(\hat{q},p)$. QED.

Definamos el vector de demandas efectivas excedentes agregadas $E(q,p) = \bar{S}(q,p) - G(q,p)$. Hemos demostrado en el Teorema 2 que para cualquier $p\epsilon C$ existe un $\hat{q}\epsilon\dot{Q}(p)$ que anula a $E(q,p)$. El siguiente supuesto es suficiente para que ese $\hat{q}$ sea único.

S7 $\bar{S}_i(q,p)+\bar{a}_{ii}(q,p)$ es cóncava con respecto a q para todo i y estrictamente cóncava para al menos un i.

Teorema 3 Dado S7 hay un único $\hat{q}\epsilon Q(p)$ que verifica $\bar{S}(q,p)=G(q,p)$.

Demostración Supongamos que también $q'\epsilon Q(p)$ verifica esa igualdad. Por S7, también es cóncava

$$\bar{S}_i(q,p) + q(I-A)^i - a_{oi} + \bar{a}_{ii}(q,p) = \bar{S}_i(q,p)-G_i(q,p) = E_i(q,p)$$

pues la suma de funciones conserva la concavidad. Además, $E_i$ es estrictamente cóncava para alguna i. Luego si definimos $q(\alpha)=\alpha\hat{q}+(1-\alpha)q'$, para todo $\alpha\epsilon(0,1)$ se tiene

$$E_i(q(\alpha),p) \geq 0 = \alpha E_i(\hat{q},p) + (1-\alpha)E_i(q',p) \text{ para todo i,}$$

con desigualdad estricta para al menos una i. Esto implica que $E(q(\alpha),p)p^1 > 0$. Pero $q(\alpha)\epsilon Q(p)$ pues Q(p) es convexo. Luego la última desigualdad contradice el Lema 2a). QED.

## IV. Equilibrio General Keynesiano

Sobre la base del Teorema 3 podemos llamar $q(p)$ al único $q \in Q(p)$ que verifica $E(q,p)=0$.

En esta sección suponemos que el salario es fijo pero admitimos la flexibilidad de los precios de los bienes. Demostraremos que, sin supuestos adicionales, para cualquier salario en el intervalo $[\varepsilon,1]$ puede encontrarse un vector de precios para los bienes y un vector de producción bruta agregada tal que no sólo se anulan las demandas efectivas excedentes agregadas sino que, además, dados los precios y el salario se maximiza el beneficio conjunto de las empresas en el conjunto factible $Q(p)$.

Definición $(q,p)$ constituye un Equilibrio General Keynesiano (EGK) si verifica:

a) $q \in Q(p)$,

b) $Bp \geq 0$, $p_{n+1} \geq \varepsilon$,

c) $\bar{L}(q,p) = \bar{q}t$, $\bar{S}(q,p) = G(q,p)$,

d) $qBp \geq q'Bp$ para todo $q' \in Q(p)$.

Definamos al conjunto

$$E(w) = \left\{ p \in R^{n+1} / \; Bp \geq 0,\; p_{n+1} = w,\; eBp + p_{n+1} = 1 \right\}.$$

Obsérvese que para todo $w \in [\varepsilon,1]$, $E(w) \neq \emptyset$.

Teorema 4 Dados SI-S7, para todo $w \in [\varepsilon,1]$ existe un $\hat{p} \in E(w)$ tal que $(q(\hat{p}),\hat{p})$ constituye un EGK.

Demostración Dado un $w \in [\varepsilon,1]$, defínase la correspondencia

$$M:E(w) \to E(w), \quad M(p) = \left\{ p' \in E(w) / \; q(p)Bp' \geq qBp',\; \forall q \in Q(p) \right\}.$$

Demostraremos a continuación que se trata de una correspondencia cerrada con imágen no-vacía y convexa en cada punto de su dominio no-vacío, compacto y convexo. En tal caso, puede aplicarse el Teorema de Punto Fijo de Kakutani (cfr. Nikaido (1968), Teorema 4.4). Esto

un número $\alpha$ tal que para todo $q \in Q(p)$ se tiene $qu \leq \alpha$ y $q(p)u = \alpha$. Luego

(21) para todo $q \in Q(p)$ se tiene $qu \leq q(p)u$.

Podemos también afirmar que $u \geq o$. Pues debido a la estructura de $Q(p)$ y a la positividad de $(a_o, L(q,p))$ (S5a)) no sólo $0 \in Q(p)$ sino que, además, existe un $\beta > 0$ suficientemente pequeño como para que $(\beta e_j) \in Q(p)$ para todo j. Si fuera $u_i < 0$ para algún i tendríamos

$$q(p)u \geq 0 > (\beta e_i)u = \beta u_i,$$

lo que contradice a (21).

Cualquier múltiplo no-negativo de u también verifica (21). Tomemos aquel que satisface $eu = 1-w$ y sea

$$\tilde{p} = \begin{bmatrix} (I-A)^{-1}(u+tw) \\ w \end{bmatrix}.$$

Por (20), $\tilde{p} \in E(w)$. Además, puede verificarse que $B\tilde{p} = u$. Luego, por (21)

para todo $q \in Q(p)$ se tiene $q(p)B\tilde{p} \geq qB\tilde{p}$,

o sea, hemos encontrado un $\tilde{p} \in M(p)$.

Obsérvese que cuando $w=1$, se está tomando $B\tilde{p} = u = 0$ y $\tilde{p} = {}^t(v\ 1) \equiv v'$ donde $v \equiv (I-A)^{-1}t$ es el vector de valores-trabajo. En este caso muy particular a) $E(w)$ se reduce al único punto $v'$, b) como ningún proceso rinde beneficio positivo, $q(v')$ maximiza el beneficio conjunto. QED.

Al comenzar la Sección II supusimos que cada empresa elegía un $q^k \in Q^k$. Ahora vamos a suponer que eligen vectores $q^k$ tales que $q^k \in \dot{Q}^k$ y $q \in \dot{Q}$, lo que implica que hay algún stock que todas las empresas agotan en su plan original (no-racionado) de producción. Y sobre la base del Teorema 4 vamos a analizar los distintos casos que se presentan según dónde esté ubicado $q(\hat{p})$ en $\dot{Q}(\hat{p})$.

1) $q(\hat{p})t < L(q(\hat{p}), \hat{p})$.

En este caso las familias están racionadas en su oferta de

trabajo, o sea, hay desempleo involuntario. Las familias no están sobre sus "curvas" de demanda nocionales, o en forma más precisa, sus funciones de demanda efectiva difieren de las nocionales en el punto de equilibrio. Como $q(\hat{p}) \in \dot{Q}(\hat{p})$, necesariamente se tiene $q(\hat{p}) \in \dot{Q}$. Luego todas las empresas utilizan al máximo algún insumo. Como las empresas no están racionadas en su demanda de trabajo, sus demandas efectivas de stocks coinciden con sus demandas nocionales. Puede llamarse a esta situación un EGK con desempleo involuntario.

2) $q(\hat{p})t = L(q(\hat{p}),\hat{p})$.

En este caso las familias no están racionadas en su oferta de trabajo y, por lo tanto, su demanda efectiva coincide con su demanda nocional. Para las empresas pueden presentarse dos situaciones.

a) $q(\hat{p})A < a_o$. En este caso (si $w < 1$), las empresas no están maximizando beneficios sujetas a su restricción de stocks (primera etapa de (3)). Pues como $\hat{p} \in E(w)$ se tiene $B\hat{p} \geq 0$. Luego las empresas producirían más (hasta llegar a $\dot{Q}$) si no fuera porque están racionadas. Luego la demanda efectiva de stocks de las empresas no coincide con la nocional. Hay escasez de trabajo y capacidad ociosa. Puede llamarse a una situación tal un EGK con escasez de trabajo.

b) $q(\hat{p})A \geq a_o$. En este caso, como en 1), las empresas utilizan al máximo algún stock. Luego no están racionadas. Su demanda efectiva coincide con su demanda nocional y se encuentran maximizando beneficios sujetas a sus restricciones "naturales". Como las familias tampoco están racionadas se tiene una situación en la que la demanda nocional es igual a la oferta nocional en todos los mercados. Además, como las empresas maximizan beneficios en $Q^k$, están resolviendo su problema de optimización originario (3). Se tiene, entonces, un Equilibrio General Walrasiano. A diferencia del problema planteado en la Sección I, sin embargo, no necesariamente existe tal EGW. Pues ahora estamos tomando un salario fijo w. Sólo estamos seguros de que existe un EGK.

Figura 1 (Teorema 2)

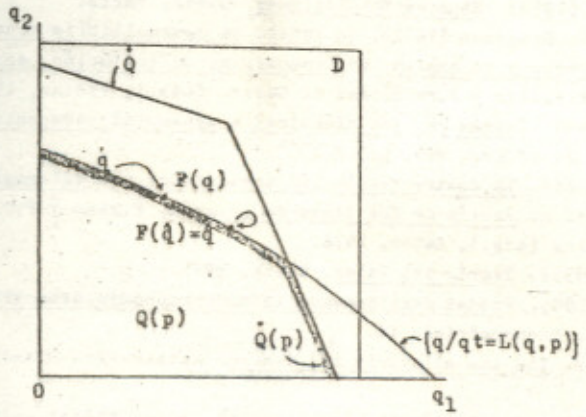
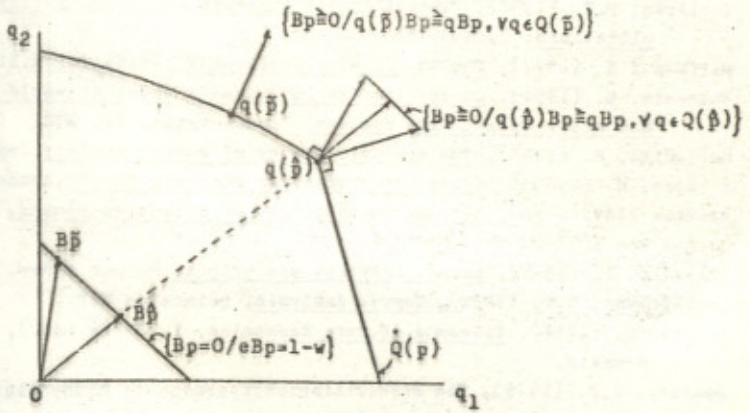



Figura 2 (Teorema 4)



## Bibliografía


Apostol, Tom M. (1976), Análisis matemático (Segunda Edición), Reverté

Arrow K.J. y F.H. Hahn (1971), General Competitive Analysis, Holden Day

Berge, Claude (1959), Espaces Topologiques, Dunod, Paris.

Barro R.J. y H. Grossman (1971), Un modelo de desequilibrio general de la renta y el empleo. En Desequilibrio, inflación, desempleo, E.Aguiló y J.Fernández de Castro (eds.), Vicens, 1979.

Clower, R (1960), Keynes and the classics: a dynamical perspective, Quart. J. of Ec., May, p.318-23.

Clower, R. (1965), La contrarrevolución keynesiana: una valoración teórica. En Teoría de los tipos de interés, F.Hahn y F.P.R. Brechling (eds.), Labor, 1974.

Debreu, G. (1959), Teoría del Valor, Bosch, 1973.

Drazen, A. (1980), Recent developments in macroeconomic disequilibrium theory, Econometrica, 48,

Gale D. (1956), The law of supply and demand, Mathematica Scandinavica, 3.

Gale D. y H. Nikaido (1965), The Jacobian matrix and global univalence of mappings. Math. Ann. 159, Nº2.

Grandmont, J.M. (1977), Temporary General Equilibrium, Econometrica 45

Hicks, J.R. (1965), Capital and Growth, Oxford U.P.

Keynes, J.M. (1936), The General Theory of Employment, Interest and Money, Macmillan.

Korliras, P.G. (1980), Disequilibrium theories and their policy implications, Kyklos, 33.

Malinvaud E. (1977), The theory of unemployment reconsidered, Blackwell

McKenzie, L. (1954), On equilibrium in Graham's model of world trade and other competitive systems, Econometrica, 22, Nº2.

Morishima, M. (1976), The economic theory of modern society, Cambridge.

Nikaido, H. (1968), Convex Structures and Economic Theory, Academic P.

Nikaido (1975), Monopolistic Competition and Effective Demand, Princeton U.P.

Patinkin, D. (1965), Money, interest and prices, Harper & Row.

Rockafellar, R.T. (1970), Convex Analysis, Princeton U.P.

Walras, L. (1954), Elements of Pure Economics, W. Jaffé (ed.), Allen & Unwin.

Benassy, J.P. (1976), The Disequilibrium Approach to Monopolistic Price Setting and General Monopolistic Equilibrium, Rev.Ec.St.43

Negishi, T. (1979), Microeconomic Foundations of Keynesian Macroeconomics, North-Holland.