

NO UNICIDAD EN MODELOS MACROECONOMICOS
ESTOCASTICOS CON EXPECTATIVAS RACIONALES:
ALGUNOS NUEVOS RESULTADOS.

Juan Carlos Di Tata (*)

(*) CENYB, BCRA.

NO UNICIDAD EN MODELOS MACROECONOMICOS ESTOCASTICOS CON EXPECTATIVASRACIONALES: ALGUNOS NUEVOS RESULTADOS. *I. Introducción.

Recientemente, la atención de la profesión se ha visto atraída por problemas de no unicidad en algunos modelos macroeconómicos con expectativas racionales. Construyendo sobre el trabajo de Brock 1/ y en un modelo determinístico dentro de un contexto de maximización de utilidad, Calvo 2/ probó la existencia de casos que exhiben equilibrios múltiples cuando el dinero entra en la función de producción. Siguiendo una línea similar de investigación, John Taylor 3/ desarrolló un modelo macroeconómico estocástico en el cual existen muchas distribuciones de precios que satisfacen la condición usual de estabilidad (o condición de varianzas finita) de modelos con expectativas racionales. En su trabajo, la no unicidad también se debe a la presencia de balances monetarios reales en la función de producción. Sin embargo, como es mencionado por Taylor, la adopción de ciertas reglas de política monetaria también puede resultar en la generación de equilibrios múltiples 4/.

* El autor agradece los valiosos comentarios de Guillermo Calvo, Edmund S. Phelps y John B. Taylor. Este ensayo constituye el Capítulo II de mi tesis doctoral ("Essays on Expectations, Money, and Economic Activity", Columbia University, abril de 1982).

1/- Brock, W.A., 1974, "Money and Growth: The Case of Long-Run Perfect Foresight", International Economic Review 15, 750-777.

2/- Calvo, G.A., 1979, "On Models of Money and Perfect Foresight", International Economic Review 20, 83-103.

3/- Taylor, J.B., 1977, "Conditions for Unique Solutions in Stochastic Macroeconomic Models with Rational Expectations", Econometrica 45, 1377-1386.

4/- En el contexto de un modelo con precios flexibles, Sargent y Wallace han demostrado que una política monetaria consistente en "pegar" la tasa nominal de interés tiene como resultado la generación de equilibrios múltiples (ver Sargent, T.J. and M. Wallace, 1975, "Rational Expectations", the Optimal Monetary Instrument, and the Optimal Money Supply Rule", Journal of Political Economy 83, April, 241-254).

Dado que en su modelo la condición de estabilidad no es suficiente para asegurar unicidad, Taylor propuso solucionar el problema extendiendo la condición de varianza finita del nivel de precios (o condición de estabilidad) a una condición de "mínima varianza del nivel de precios". Al eliminar aquellos equilibrios racionales con varianzas de precios superiores a la mínima, Taylor pudo entonces obtener una solución única para su modelo macroeconómico estocástico.

Taylor justificó la adopción de su "minimum price variance condition" argumentando que la misma era una extensión natural de la condición de varianza finita para el nivel de precios. En sus propias palabras: "People are normally assumed to prefer less price uncertainty. If they collectively choose a finite variance path rather than an infinite variance path, then why would they not choose the smallest of all finite variances? It seems that the reasonability of the minimum variance condition rises and falls with that of the usual finite variance condition" 5/.

Como este ensayo demostrará, el problema con el criterio propuesto por Taylor es que la aplicación de su condición de "mínima varianza para el nivel de precios" no siempre coincide con la obtención de una mínima varianza para el output.

El propósito de este ensayo es discutir el criterio propuesto por Taylor, proponer un criterio más general y, además, señalar las limitaciones del mismo. La introducción de un criterio más general se basa en el supuesto razonable de que desviaciones del output de su nivel natural (que se supone eficiente) también imponen costos positivos sobre la sociedad. Por lo tanto, nosotros concluimos que es más lógico presumir que, cuando forman sus expectativas, los agentes racionales elegirán colectivamente aquella distribución de precios que mini-

5/- Taylor, J.B., op.cit., p. 1383.

nice una función de pérdida que pondere los costos relativos de las variabilidades tanto del nivel de precios como del output (este criterio será denominado de aquí en más condición de "mínima pérdida").

Además, se mantiene el supuesto "racional" de que dichas expectativas están basadas en el modelo de la economía, el cual se supone que es completamente conocido y entendido por todos los agentes económicos. Aunque este criterio sugiere un tipo de racionalidad colectiva que no ha sido explorada ni justificada en la literatura, nuestra condición de "mínima pérdida" es más general que el criterio más simple propuesto por Taylor, el cual supone que el público toma en consideración solamente la varianza del nivel de precios.

Aunque en el modelo particular originalmente utilizado por Taylor, la aplicación de nuestro criterio de "mínima pérdida" genera una solución idéntica a la que se obtiene cuando se utiliza la condición de "mínima varianza del nivel de precios", este resultado no tiene validez general. La introducción de una pequeña modificación en la estructura de información del modelo demuestra claramente que la solución única obtenida puede variar sustancialmente de acuerdo a cual de los criterios es adoptado.

El ensayo está organizado de la siguiente manera. En la sección II, nosotros demostramos brevemente que ambos criterios generan soluciones idénticas en el modelo originalmente utilizado por Taylor. En la sección III, se modifica la estructura de información del modelo de Taylor y se demuestra que la aplicación de cada uno de los criterios resulta en diferentes soluciones de equilibrio. La sección IV discute algunas implicancias de política monetaria, en particular, un tipo de regla monetaria que eliminaría el problema de equilibrios múltiples y, además, la no-neutralidad de una política monetaria sistemática en nuestra versión modificada del modelo de Taylor. La sección V presenta algunas conclusiones.

nes y relaciona este t6pico con cierta literatura reciente sobre expectativas de expectativas 6/.

II. La soluci6n de "m6nima p6rdida" en el modelo de Taylor.

El modelo de Taylor consiste de las siguientes ecuaciones:

$$y_t^d = -\gamma_1 (i_t - E_{t-1} p_{t+1} + E_{t-1} p_t) + \gamma_2 (m_t - p_t) + e_{1t}, \quad (1)$$

$$y_t^s = \phi_0 + \phi_1 (m_t - p_t) + e_{2t}, \quad (2)$$

$$m_t^d = y_t + p_t - \alpha_1 i_t + \alpha_2 (m_t - p_t) + e_{3t}, \quad \alpha \leq 1 \quad (3)$$

$$m_t^s = m, \quad (4)$$

donde y_t , m_t y p_t son los logaritmos de output, de la oferta de dinero y del nivel de precios, respectivamente; i_t es la tasa nominal de inter6s y e_{1t} , e_{2t} y e_{3t} son variables aleatorias no correlacionadas serialmente, independientemente y normalmente distribuidas con media zero y varianzas σ_{e1}^2 , σ_{e2}^2 y σ_{e3}^2 , respectivamente. E es el operador expectativa matem6tica condicional, basado en la informaci6n disponible al finalizar el per6odo $t-1$.

De acuerdo a (1), la demanda agregada depende negativamente de la tasa real de inter6s y positivamente de los saldos monetarios reales.

La ecuaci6n (2) indica que la oferta agregada es una funci6n positiva de los saldos monetarios reales.

6/-El problema de expectativas de expectativas ha sido analizado con un enfoque macroecon6mico en Phelps, E.S., "The Trouble With 'Rational Expectations' and the Problem of Inflation Stabilization" y en Di Tata, J.C., "Expectations of Others' Expectations and the Transitional Non-Neutrality of Fully Believed Systematic Monetary Policy". Ambos trabajos fueron presentados en la Conferencia sobre "Expectations Formation and Economic Disequilibrium", New York University, December 4, 1981 y ser6n publicados pr6ximamente en Individual Forecasting and Aggregate Outcomes: 'Rational Expectations' Examined, Cambridge University Press, libro a ser editado por Roman Frydman y Edmund S. Phelps.

La ecuación (3) representa a la función de demanda nominal de dinero. Dicha demanda depende positivamente del ingreso nominal, negativamente de la ta sa nominal de interés y positivamente de los saldos monetarios reales.

Se asume que los mercados de bienes y de dinero están en equilibrio. La oferta monetaria permanece fija e igual a m .

Taylor resolvió su modelo utilizando el método de coeficientes indeterminados y obtuvo las siguientes expresiones para el nivel de precios, la media del nivel de precios y la varianza del nivel de precios:

$$p_t = \bar{p} + \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i u_{t-i} = (1+\delta_1)p_{t-1} + \delta_0 - \delta_1^{-1}u_t + [\pi_1 - (1+\delta_1)\delta_1^{-1}]u_{t-1}, \quad (5)$$

$$\bar{p} = -\delta_0 \delta_1^{-1}, \quad (6)$$

$$\text{var}(p_t) = \sigma_u^2 \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i^2 = \sigma_u^2 [\pi_0^2 + \pi_1^2 + \sum_{i=2}^{\infty} (1+\delta_1)^{2i}], \quad (7)$$

donde

$$\pi_0 = -\delta_1^{-1} \quad (8)$$

$$\pi_{i+1} = (1+\delta_1)\pi_i, \quad (i=1, 2, \dots) \quad (9)$$

$$\delta_0 = \phi_0 (\alpha_1^{-1} + \gamma_1^{-1}) - \delta_1 m, \quad (10)$$

$$\delta_1 = \alpha_1^{-1} (1 - \alpha_2) + \gamma_2 \gamma_1^{-1} - \phi_1 (\alpha_1^{-1} + \gamma_1^{-1}), \quad (11)$$

$$u_t = e_{2t} (\gamma_1^{-1} + \alpha_1^{-1}) + \alpha_1^{-1} e_{3t} - \gamma_1^{-1} e_{1t}, \quad (12)$$

y

σ_u^2 es la varianza de u_t .

Asumamos que el parámetro δ_1 es diferente de cero. Si $\delta_1 > 0$, el único valor de π_1 que proporciona una varianza finita para el nivel de precios es $\pi_1 = 0$. Por esta razón, Taylor concluye que cuando $\delta_1 > 0$, la condición de va

ALMA

rianza finita es suficiente para generar una distribución única para p_t .

Por el contrario, si $-2 < \delta_1 < 0$ (si ϕ_1 es suficientemente grande como para que δ_1 sea negativo pero mayor que -2), la varianza del nivel de precios es finita para cualquier valor arbitrario finito de π_1 . Luego, la condición de estabilidad es incapaz de eliminar el problema de múltiples equilibrios racionales 7/.

Para obtener unicidad, Taylor propone su condición de "mínima varianza del nivel de precios". Esta última impone el requerimiento de que π_1 sea igual a cero y proporciona la siguiente solución única para p_t :

7/- Otra razón estructural capaz de generar equilibrios múltiples es el "efecto Pigou invertido" discutido por Tobin. Tobin ha argumentado lo siguiente. Un nivel de precios más bajo incrementa la carga real de las deudas privadas en el corto plazo. La transferencia de ingresos y de riqueza a los acreedores promueve una caída de la demanda agregada porque los deudores tienen una mayor propensión a gastar que los acreedores. Tobin piensa que este último efecto negativo sobre la demanda agregada puede ser aún más importante que el efecto expansionario sobre el consumo proveniente del usual efecto Pigou (ver Tobin, J., "Keynesian Models of Recession and Depression", American Economic Review, May 1975, 195-202).

Resolviendo el siguiente modelo:

$$y_t^s = a_1(p_t - E_{t-1} p_t) + e_{1t}, \quad (1'')$$

$$y_t^d = -a_2(i_t - E_{t-1} p_{t+1} + E_{t-1} p_t) + a_3(m_t - p_t) + a_4 p_t + e_{2t}, \quad (2'')$$

$$m_t - p_t = y_t - a_5 i_t + a_6(m_t - p_t) + e_{3t}, \quad a_6 \leq 1, \quad (3'')$$

$$m_t^s = m, \quad (4'')$$

donde (1''), (2''), (3'') y (4'') representan la función de oferta agregada, la función de demanda agregada, la función de demanda de dinero y la oferta monetaria fija, respectivamente; y donde el término positivo $a_4 p_t$ es una proxy del efecto redistributivo mencionado por Tobin; puede demostrarse que la condición de estabilidad es incapaz de eliminar equilibrios múltiples si

$$\frac{a_2(1-a_6)+a_3a_5}{a_5} < a_4 < \frac{2a_5a_2+a_2(1-a_6)+a_3a_5}{a_5}.$$

La media del nivel de precios quedará indeterminada si

$$\frac{a_2(1-a_6)+a_3a_5}{a_5} = a_4.$$

$$p_t = \bar{p} + \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i u_{t-i} = \delta_0 \delta_1^{-1} - \delta_1^{-1} u_t. \quad (13)$$

Entonces, la media de p_t resulta ser igual a $-\delta_0 \delta_1^{-1}$ y su varianza es $\delta_1^2 \sigma_u^2$. Puede demostrarse fácilmente que, en esta versión del modelo, esta solución final que se obtiene cuando se aplica la condición de "mínima varianza del nivel de precios" resulta ser igual a la que se genera cuando se aplica nuestro criterio de "mínima pérdida". Supongamos por simplicidad que no existen divergencias entre los individuos en cuanto a sus ponderaciones de los costos relativos generados por la variabilidad del nivel de precios y del output. Por otra parte, asumiremos que cada agente racional cree que todos los otros participantes en el mercado también forman sus expectativas de acuerdo al criterio de "mínima pérdida". Entonces, el público minimiza con respecto a π_1 una función de pérdida como la siguiente:

$$\text{Min}_{\pi_1} E[a(y_t - \bar{y})^2 + b(p_t - \bar{p})^2],$$

donde $\bar{y}$ representa al valor "natural" del output. Sustituyendo por $y_t - \bar{y}$ y por la varianza del nivel de precios, se obtiene

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\pi_1} & \left\{ aE[\phi_0 + \phi_1(m - \bar{p} - \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i u_{t-i}) + e_{2t} - \phi_0 - \phi_1 m + \phi_1 \bar{p}]^2 \right. \\ & \quad \left. + b\sigma_u^2[\pi_0^2 + \pi_1^2 \sum_{i=0}^{\infty} (1 + \delta_1)^{2i}] \right\} = \\ & = \text{Min}_{\pi_1} \left\{ aE[-\phi_1 \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i u_{t-i} + e_{2t}]^2 + b\sigma_u^2[\pi_0^2 + \pi_1^2 \sum_{i=0}^{\infty} (1 + \delta_1)^{2i}] \right\} \\ & = \text{Min}_{\pi_1} \left\{ a\phi_1^2 \sigma_u^2[\pi_0^2 + \pi_1^2 \sum_{i=0}^{\infty} (1 + \delta_1)^{2i}] - 2a\phi_1 E(e_{2t} \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i u_{t-i}) + a\sigma_{e2}^2 \right. \\ & \quad \left. + b\sigma_u^2[\pi_0^2 + \pi_1^2 \sum_{i=0}^{\infty} (1 + \delta_1)^{2i}] \right\} \end{aligned}$$

R. C. R. A.

La condición de primer orden,

$$\frac{\partial [a \text{ var } y_t + b \text{ var } p_t]}{\partial \pi_1} = 2\pi_1 a \sigma_1^2 \sum_{i=0}^{\infty} (1+b_1)^{2i} + 2\pi_1 b \sigma_{ui=0}^2 \sum_{i=0}^{\infty} (1+b_1)^{2i} = 0$$

implica que el valor requerido para π_1 es $\pi_1 = 0$, valor que coincide con aquel que resultó luego de la adopción del criterio de "mínima varianza del nivel de precios" propuesto por Taylor. La condición de segundo orden para un mínimo es satisfecha.

III. La solución de "mínima pérdida" con una estructura de información diferente.

Modificaremos el modelo de Taylor y asumiremos que los agentes racionales disponen de la información correspondiente al período t . Luego, E_t es el operador expectativa matemática condicional, basado en toda la información disponible en el momento t . Como Taylor mismo comenta en un pie de página de su trabajo, esta estructura de información elimina la asimetría de tener tanto a p_t como a $E_{t-1} p_t$ en la función de demanda agregada, evitando entonces la interpretación de que p_t es tratado al mismo tiempo como conocido (primer término de 1) y como desconocido (segundo término de 1) B/.

Las ecuaciones (2), (3) y (4) permanecen inalteradas. La única ecuación que sufre modificaciones es la función de demanda agregada. Ahora, la misma resulta ser

$$y_t = -\gamma_1 (i_t - E_t p_{t+1} + E_t p_t) + \gamma_2 (m_t - p_t) + e_{1t} \quad (1')$$

Usando la ecuación (3) para sustituir por i_t en la ecuación (1'), nosotros obtenemos

$$y_t = -\gamma_1 \left[\frac{y_t + (1-\alpha_2)p_t - (1-\alpha_2)m_t + e_{3t}}{\alpha_1} - E_t p_{t+1} + p_t \right] + \gamma_2 (m_t - p_t) + e_{1t}$$

B/- Ver Taylor, J.B., op. cit., p.1379. Taylor finalmente elige usar el operador E_{t-1} para realizar una comparación más conveniente con otros modelos con expectativas racionales.

Utilizando luego las ecuaciones (2) y (4) para sustituir por y_t y por

$$z_t, \text{ respectivamente, se obtiene } \left[\phi_0 + \phi_1(m-p_t) + e_{2t} + (1-\alpha_2)p_t - (1-\alpha_2)m + e_{3t} \right] \\ \phi_0 + \phi_1(m-p_t) + e_{2t} = -\gamma_1 \frac{\left[\phi_0 + \phi_1(m-p_t) + e_{2t} + (1-\alpha_2)p_t - (1-\alpha_2)m + e_{3t} \right]}{\alpha_1} \\ -\gamma_1(-E_t p_{t+1} + p_t) + \gamma_2(m-p_t) + e_{1t}.$$

Reordenando términos, puede obtenerse la siguiente forma reducida que envuelve a

$E_t p_{t+1}$ y a p_t :

$$E_t p_{t+1} = (1+\delta_1)p_t + \delta_0 + u_t, \quad (14)$$

donde δ_1 , δ_0 y u_t están dados por las expresiones (10), (11) y (12), respectivamente.

El nivel de precios puede entonces ser representado en la siguiente forma general:

$$p_t = \bar{p} + \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i u_{t-i}, \quad (15)$$

donde $\bar{p}$ y π_i son parámetros a ser determinados y u_t es la variable aleatoria con media cero y no correlacionada serialmente que ya fue previamente introducida en la ecuación (12). Luego,

$$E_t p_{t+1} = \bar{p} + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i u_{t+1-i}.$$

Sustituyendo por p_t y por $E_t p_{t+1}$ en (14) y resolviendo mediante el método de

coeficientes indeterminados, nosotros obtenemos

$$\bar{p} = -\delta_1^{-1} \delta_0, \quad (\delta_1 \neq 0) \quad (16)$$

$$\pi_1 = (1+\delta_1)\pi_0 + 1, \quad (17)$$

y

$$\pi_{i+1} = (1+\delta_1)\pi_i \quad (i=1, 2, \dots) \quad (18)$$

Nuevamente, $\bar{p}$ queda determinado, pero π_0 y, por lo tanto, π_i ($i \geq 1$) quedan

indeterminados. Sustituyendo los valores anteriores en la ecuación (15) y sustrayendo $(1 + \delta_1) p_{t-1}$ de p_t , nosotros obtenemos la siguiente representación para p_t , como un modelo mixto autorregresivo promedios móviles de orden uno,

$$p_t = (1 + \delta_1) p_{t-1} - \delta_1^{-1} \delta_0 + (1 + \delta_1) \delta_1^{-1} \delta_0 + \pi_0 u_t + [\pi_1 - \pi_0 (1 + \delta_1)] u_{t-1}.$$

Después de usar (17) para sustituir por π_1 y de reordenar términos, resulta entonces que p_t puede ser expresado en la siguiente forma:

$$p_t = (1 + \delta_1) p_{t-1} + \delta_0 + \pi_0 u_t + u_{t-1}, \quad (19)$$

donde cada valor tomado por π_0 proporciona una distribución diferente para p_t .

De acuerdo con (15), la varianza de p_t resulta ser

$$\begin{aligned} \text{var}(p_t) &= \sigma_u^2 \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i^2 = \sigma_u^2 \sum_{i=0}^{\infty} [\pi_0 + \pi_1]^2 (1 + \delta_1)^{2i} \\ &= \sigma_u^2 \left\{ \pi_0^2 + [(1 + \delta_1) \pi_0 + 1]^2 \sum_{i=0}^{\infty} (1 + \delta_1)^{2i} \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Si $\delta_1 > 0$, el único valor de π_0 que proporciona una varianza finita para p_t es $\pi_0 = -\frac{1}{1 + \delta_1}$. Por lo tanto, cuando $\delta_1 > 0$, la condición de varianza finita resulta en una distribución única para p_t . Utilizando (15), p_t puede expresarse de la siguiente manera:

$$p_t = -\delta_1^{-1} \delta_0 - \frac{1}{1 + \delta_1} u_t. \quad (21)$$

En cambio, si $-2 < \delta_1 < 0$, la ecuación (20) implica que la varianza de p_t es finita para cualquier valor arbitrario de π_0 , lo cual implica que la condición de estabilidad (o condición de varianza finita) no es lo suficientemente fuerte como para impedir la aparición de equilibrios múltiples. Enton-

R. L. A.

ces, Taylor propondría obtener unicidad a través de la imposición de su criterio de "mínima varianza para el nivel de precios". La condición de primer orden

$$\frac{\partial \text{var}(p_t)}{\partial \pi_0} = 2\sigma_u^2 \pi_0 + 2\sigma_u^2 (1+\delta_1)^2 \pi_0 \sum_{i=0}^{\infty} (1+\delta_1)^{2i} + 2\sigma_u^2 (1+\delta_1)^2 \sum_{i=0}^{\infty} (1+\delta_1)^{2i} = 0$$

implica que el valor elegido para π_0 es.

$$\pi_0^* = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} (1+\delta_1)^{2i+1}}{1 + \sum_{i=0}^{\infty} (1+\delta_1)^{2(i+1)}} \quad (22)$$

La condición de segundo orden para un mínimo es satisfecha.

Sin embargo, la imposición de nuestra condición de "mínima pérdida" genera una solución diferente para π_0 , como se mostrará a continuación. Sustituyendo por $y_t - \bar{y}$ y por la varianza de p_t ,

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\pi_0} \left[aE(y_t - \bar{y})^2 + bE(p_t - \bar{p})^2 \right] &= \text{Min}_{\pi_0} \left\{ aE \left[-\phi_1 \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i u_{t-i} + e_{2t} \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + b\sigma_u^2 \left[\pi_0^2 + [(1+\delta_1)\pi_0 + 1]^2 \sum_{i=0}^{\infty} (1+\delta_1)^{2i} \right] \right\} \\ &= \text{Min}_{\pi_0} \left\{ a \left\{ \phi_1^2 \sigma_u^2 \left[\pi_0^2 + [(1+\delta_1)\pi_0 + 1]^2 \sum_{i=0}^{\infty} (1+\delta_1)^{2i} \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2\phi_1 E e_{2t} \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i u_{t-i} + E e_{2t}^2 \right\} + b\sigma_u^2 \left[\pi_0^2 + [(1+\delta_1)\pi_0 + 1]^2 \sum_{i=0}^{\infty} (1+\delta_1)^{2i} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Usando la expresión (12) para sustituir por u_t ,

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\pi_0} \left[a \text{var}(y_t) + b \text{var}(p_t) \right] &= \text{Min}_{\pi_0} \left\{ a \phi_1^2 \sigma_u^2 \left[\pi_0^2 + [(1+\delta_1)\pi_0 + 1]^2 \sum_{i=0}^{\infty} (1+\delta_1)^{2i} \right] \right. \\ &\quad \left. - 2a\phi_1 \pi_0 (c_1^{-1} + c_1^{-1}) \sigma_e^2 + a\sigma_e^2 + b\sigma_u^2 \left[\pi_0^2 + [(1+\delta_1)\pi_0 + 1]^2 \sum_{i=0}^{\infty} (1+\delta_1)^{2i} \right] \right\} \end{aligned}$$

La condición de primer orden

$$\frac{\partial(a \text{ var } y_t + b \text{ var } p_t)}{\partial \pi_0} = 2a\phi_1^2 \sigma_u^2 \pi_0 + 2a\phi_1^2 \sigma_u^2 (1+\delta_1)^2 \pi_0 \sum_{i=0}^{\infty} (1+\delta_1)^{2i} \\ + 2a\phi_1^2 \sigma_u^2 (1+\delta_1) \sum_{i=0}^{\infty} (1+\delta_1)^{2i} - 2a\phi_1^2 \sigma_{e2}^2 (\gamma_1^{-1} + \alpha_1^{-1}) + 2b\sigma_u^2 \pi_0 \\ + 2b\sigma_u^2 \pi_0 (1+\delta_1)^2 \sum_{i=0}^{\infty} (1+\delta_1)^{2i} + 2(1+\delta_1)b\sigma_u^2 \sum_{i=0}^{\infty} (1+\delta_1)^{2i} = 0,$$

implica que el valor elegido para π_0 será

$$\pi_0^{**} = \frac{-(a\phi_1^2 + b)\sigma_u^2 \sum_{i=0}^{\infty} (1+\delta_1)^{2i+1} + a\phi_1^2 (\gamma_1^{-1} + \alpha_1^{-1})\sigma_{e2}^2}{\sigma_u^2 \left[1 + \sum_{i=0}^{\infty} (1+\delta_1)^{2(i+1)} \right] (a\phi_1^2 + b)}, \quad (23)$$

Si $a > 0$ y $\frac{1}{e2} \neq 0$, π_0^{**} difiere con respecto a π_0 , es decir, difiere de aquel valor de π_0 que resulta después de la imposición de la condición de "varianza mínima" sugerida por Taylor. La condición de segundo orden para un mínimo es satisfecha.

Por lo tanto, la condición de "mínima pérdida" determina un valor particular para π_0 (π_0^{**}) que elimina a los otros equilibrios y proporciona distribuciones únicas para el output y para el nivel de precios. El punto esencial es que, dado que es razonable asumir que desviaciones del output de su nivel natural imponen costos positivos sobre la sociedad, el público forma expectativas de forma tal de lograr un "trade-off" entre una mayor varianza de precios y una menor varianza del output. En el modelo originalmente usado por Taylor, una mayor varianza para el nivel de precios siempre resultaba en una mayor varianza para el output debido a que se asumía que el público no disponía de la información adicional necesaria (en la ecuación de demanda agregada) para generar este tipo de trade-off.

La ausencia de este trade-off en el modelo de Taylor y la existencia del mismo en nuestro modelo merecen cierta explicación. Las ecuaciones (5) y (8)

R. C. P. A.

muestran claramente que, en la versión de Taylor, las decisiones del público no son capaces de alterar el efecto del shock correspondiente al período corriente (u_t) sobre p_t . Esta conclusión surge del hecho de que π_0 puede tomar solamente el valor único determinado por la expresión (8). En nuestro modelo, en cambio, el valor de π_0 queda indeterminado cuando $-2 < \delta_1 < 0$. Entonces, tal como lo muestra la ecuación (19), el público puede "controlar" el efecto de u_t sobre p_t mediante la elección de diferentes valores para π_0 . Este último resulta ser el mecanismo de expectativas a través del cual el público genera el ya mencionado trade-off entre las varianzas del output y del nivel de precios.

Después de imponer nuestra condición de "mínima pérdida", las representaciones únicas resultantes para p_t y para y_t son las siguientes:

$$p_t = -\delta_1^{-1} \delta_0 + \pi_0^{**} u_t + \sum_{i=0}^{\infty} (1+\delta_1)^i [(1+\delta_1) \pi_0^{**} + 1] u_{t-1-i},$$

and

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 \left\{ \delta_1^{-1} \delta_0 - \pi_0^{**} u_t - \sum_{i=0}^{\infty} (1+\delta_1)^i [(1+\delta_1) \pi_0^{**} + 1] u_{t-1-i} \right\} + e_{2t},$$

where $-2 < \delta_1 < 0$.

Una buena manera de comparar la condición de "mínima varianza" sugerida por Taylor y nuestro criterio de "mínima pérdida" es analizar el cociente $\text{Var}_1 p_t / \text{Var}_p p_t$, donde $\text{Var}_1 p_t$ representa a aquella varianza del nivel de precios que resulta de imponer el criterio de "mínima pérdida" y $\text{Var}_p p_t$ representa a la varianza del nivel de precios que resulta de imponer el criterio de "mínima varianza para el nivel de precios". Por simplicidad, se asumirá que $b=0$ y $a=1$. Esto último implica que el público asigna una ponderación nula a la varianza del nivel de precios y simplemente elige aquella solución que minimiza la varianza del output. Esto último implica que $\text{Var}_1 p_t = \text{Var}_y p_t$ (la varianza del nivel de precios que resulta luego de la imposición de la condición de "mínima varianza para el output").

B. G. A.

Después de sustituir aquel valor de π_0 que resulta de la imposición de la condición de "mínima varianza para el nivel de precios" sugerida por Taylor (expresión 22), la varianza del nivel de precios puede ser expresada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{var}_{p,t} p_u &= \sigma_u^2 \left\{ \frac{\left[\frac{\sum_{i=0}^{\infty} (1+b_1)^{2i+1}}{1 + \sum_{i=0}^{\infty} (1+b_1)^{2(i+1)}} \right]^2}{2} + \frac{\left[\frac{\sum_{i=0}^{\infty} (1+b_1)^{2(i+1)}}{1 + \sum_{i=0}^{\infty} (1+b_1)^{2(i+1)}} \right]^2}{2} \sum_{i=0}^{\infty} (1+b_1)^{2i} \right\} \\ &= \sigma_u^2 \left\{ \frac{\left[\frac{\sum_{i=0}^{\infty} (1+b_1)^{2i+1}}{1 + \sum_{i=0}^{\infty} (1+b_1)^{2(i+1)}} \right]^2}{2} \right. \\ &\quad \left. + \sigma_u^2 \frac{\left[\frac{\sum_{i=0}^{\infty} (1+b_1)^{2(i+1)}}{1 + \sum_{i=0}^{\infty} (1+b_1)^{2(i+1)}} \right]^2}{1 + \sum_{i=0}^{\infty} (1+b_1)^{2(i+1)}} \sum_{i=0}^{\infty} (1+b_1)^{2i} \right\}. \end{aligned}$$

Reordenando términos,

$$\begin{aligned} \text{var}_{p,t} p_u &= \sigma_u^2 \left\{ \frac{(1+b_1)^2 \left[\sum_{i=0}^{\infty} (1+b_1)^{2i} \right]^2 + \sum_{i=0}^{\infty} (1+b_1)^{2i}}{\left[1 + \sum_{i=0}^{\infty} (1+b_1)^{2(i+1)} \right]^2} \right\} \\ &= \sigma_u^2 \frac{[1 + (1+b_1)^2 \sum_{i=0}^{\infty} (1+b_1)^{2i}] \sum_{i=0}^{\infty} (1+b_1)^{2i}}{[1 + (1+b_1)^2 \sum_{i=0}^{\infty} (1+b_1)^{2(i+1)}]^2} = \sigma_u^2 \frac{\sum_{i=0}^{\infty} (1+b_1)^{2i}}{[1 + \sum_{i=0}^{\infty} (1+b_1)^{2(i+1)}]}. \end{aligned} \quad (24)$$

Por otra parte, haciendo $a = 1$ y $b = 0$ en la expresión (23), nosotros obtenemos

$$\begin{aligned} \pi_0^{**} &= \frac{-\sum_{i=0}^{\infty} (1+b_1)^{2i+1}}{[1 + \sum_{i=0}^{\infty} (1+b_1)^{2(i+1)}]} + \frac{(\gamma_1^{-1} + \alpha_1^{-1}) \sigma_{e2}^2}{\phi_1 \sigma_u^2 [1 + \sum_{i=0}^{\infty} (1+b_1)^{2(i+1)}]} \\ &= \pi_0 + A, \end{aligned} \quad (25)$$

donde

$$A = \frac{(\gamma_1^{-1} + \alpha_1^{-1}) \sigma_{e2}^2}{\phi_1 \sigma_u^2 [1 + \sum_{i=0}^{\infty} (1+b_1)^{2(i+1)}]}. \quad (26)$$

R. C. R. A.

Luego, usando (25) para sustituir por π_o^{**} en la expresión correspondiente a $\text{Var}_Y P_t$, se obtiene:

$$\text{var}_{Y P_t} = \sigma_u^2 \left\{ (\pi_o^{**} + A)^2 + [(1 + \delta_1)(\pi_o^{**} + A) + 1]^2 \sum_{i=0}^{\infty} (1 + \delta_1)^{2i} \right\}$$

Después de ciertas manipulaciones, $\text{Var}_Y P_t$ puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \text{var}_{Y P_t} = \text{var}_{P_t} + \sigma_u^2 A^2 \left\{ 1 + \sum_{i=0}^{\infty} (1 + \delta_1)^{2(i+1)} \right\} \\ + \sigma_u^2 A \left\{ 2\pi_o^{**} \left[1 + \sum_{i=0}^{\infty} (1 + \delta_1)^{2(i+1)} \right] + 2 \sum_{i=0}^{\infty} (1 + \delta_1)^{2i+1} \right\}. \end{aligned}$$

Usando (22) para sustituir por π_o^* , $\text{Var}_Y P_t$ resulta ser:

$$\begin{aligned} \text{var}_{Y P_t} = \text{var}_{P_t} + \sigma_u^2 A^2 \left\{ 1 + \sum_{i=0}^{\infty} (1 + \delta_1)^{2(i+1)} \right\} \\ + \sigma_u^2 A \left\{ \frac{-2 \sum_{i=0}^{\infty} (1 + \delta_1)^{2i+1} \left[1 + \sum_{i=0}^{\infty} (1 + \delta_1)^{2(i+1)} \right]}{\left[1 + \sum_{i=0}^{\infty} (1 + \delta_1)^{2(i+1)} \right]} + 2 \sum_{i=0}^{\infty} (1 + \delta_1)^{2i+1} \right\} \\ = \text{var}_{P_t} + \sigma_u^2 A^2 \left[1 + \sum_{i=0}^{\infty} (1 + \delta_1)^{2(i+1)} \right]. \end{aligned}$$

Sustituyendo por A de acuerdo a la expresión (26), nosotros podemos expresar a la $\text{Var}_Y P_t$ de la siguiente forma:

$$\text{var}_{Y P_t} = \text{var}_{P_t} + \frac{[(\gamma_1^{-1} + a_1^{-1}) \sigma_{e2}^2]^2}{\sigma_u^2 \phi_1^2 \left[1 + \sum_{i=0}^{\infty} (1 + \delta_1)^{2(i+1)} \right]} \quad (27)$$

Usando luego (24) para sustituir por $\text{Var}_p p_t$ y reordenando términos, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\text{var}_{y,p_t}}{\text{var}_{p,p_t}} &= 1 + \left[\frac{\sigma_{e2}^2}{\sigma_u^2} \right]^2 \frac{(\gamma_1^{-1} + \alpha_1^{-1})^2}{\phi_1^2 \sum_{i=0}^{\infty} (1 + \delta_1)^{2i}} \\ &= 1 + \left[\frac{\sigma_{e2}^2}{\sigma_u^2} \right]^2 \frac{(\gamma_1^{-1} + \alpha_1^{-1})^2}{\phi_1^2 \sum_{i=0}^{\infty} [1 + \alpha_1^{-1} (1 - \alpha_2) + \gamma_2 \gamma_1^{-1} - \phi_1 (\alpha_1^{-1} + \gamma_1^{-1})]^{2i}} \quad (28) \end{aligned}$$

La expresión (28) muestra que el cociente $\text{Var}_Y(p) / \text{Var}_P(p_t)$ es más grande cuanto mayor es la proporción $\sigma_{e2}^2 / \sigma_u^2$. Para $-2 < \delta_1 < 0$, la expresión (28) resulta estar acotada para cualquier valor posible de los parámetros pertenecientes al segundo término a la derecha de la igualdad. Sin embargo, si nosotros modificamos la ecuación correspondiente a la demanda agregada (1') de forma tal de incluir al "efecto Pigou invertido" discutido por Tobin (ver pie de página N° 7), dicha ecuación resulta ser:

$$y_t = \gamma_1 (i_t - \sum_{t=1}^{\infty} p_{t+1} + p_t) + \gamma_2 (m_t - p_t) + \gamma_3 p_t + \epsilon_{1t}$$

donde $\gamma_3 > 0$. Entonces, el cociente $\text{Var}_Y(p) / \text{Var}_P(p_t)$ se transforma en:

$$\begin{aligned} \frac{\text{var}_{y,p_t}}{\text{var}_{p,p_t}} &= 1 + \left[\frac{\sigma_{e2}^2}{\sigma_u^2} \right]^2 \frac{(\gamma_1^{-1} + \alpha_1^{-1})^2}{\phi_1^2 \sum_{i=0}^{\infty} (1 + \delta_1 - \gamma_3 \gamma_1^{-1})^{2i}} \\ &= 1 + \left[\frac{\sigma_{e2}^2}{\sigma_u^2} \right]^2 \frac{(\gamma_1^{-1} + \alpha_1^{-1})^2}{\phi_1^2 \sum_{i=0}^{\infty} [1 + \alpha_1^{-1} (1 - \alpha_2) + (\gamma_2 - \gamma_3) \gamma_1^{-1} - \phi_1 (\alpha_1^{-1} + \gamma_1^{-1})]^{2i}} \quad (29) \end{aligned}$$

B. L. A.

y su lim es igual a ∞ , para cualquier valor de Y_3 , aún para aquellos valores de $\frac{\phi_1 \rightarrow 0}{\phi_3}$ que implican la existencia de equilibrios múltiples. Dado que en este ejemplo el cociente $\text{Var}_Y(P_t) / \text{Var}_P(P_t)$ tiende a ∞ cuando $\phi_1 \rightarrow 0$, nosotros podemos llegar a la conclusión de que existen ciertos casos de no unicidad para los cuales la aplicación del criterio propuesto por Taylor resulta en una solución que es muy diferente a la que se obtendría luego de adoptar nuestro criterio de "mínima pérdida" 2/.

IV. Política monetaria: sus implicancias.

A continuación se analizarán las implicancias resultantes de introducir en nuestro modelo la siguiente regla monetaria:

$$M_t = m + \beta P_t, \quad (4')$$

donde $\beta > 0$. Por $\beta = 1$, esta política monetaria "acomoda" totalmente al nivel de precios.

Con esta función de oferta de dinero, la solución del modelo resulta en la siguiente forma reducida que incluye a $E_t P_{t+1}$ y a P_t :

$$E_t P_{t+1} = \left[\frac{1+b}{1} (1-\beta) \right] P_t + \frac{b}{0} + u_t \quad (30)$$

Resolviendo por el método de coeficientes indeterminados, nosotros encontramos que los parámetros de la ecuación (15) deben satisfacer las siguientes condiciones:

2/ Por otra parte, en algunos modelos donde la condición de varianza finita para el nivel de precios es suficientemente fuerte como para generar una solución única, la condición de mínima varianza para el output resulta en una varianza infinita para el nivel de precios. En estos casos, puede presumirse razonablemente que, cuando forma sus expectativas, el público aceptará una varianza mayor que la mínima para el output con tal de poder obtener una varianza finita para el nivel de precios (el apéndice presenta un ejemplo).

$$\bar{p} = -\delta_0 \delta_1^{-1} (1-\beta)^{-1} \quad (31)$$

$$\pi_1 = [1 + \delta_1 (1-\beta)] \pi_0 + 1 \quad (32)$$

y

$$\pi_{i+1} = \pi_i [1 + \delta_1 (1-\beta)] \quad (i=1, 2, \dots) \quad (33)$$

Si $\beta = 1$ (si la política monetaria es totalmente "acomodativa"), la media del nivel de precios ($\bar{p}$) queda indeterminada.

Asumiremos que $\beta \neq 1$, lo cual implica que el nivel de precios tiene una media finita. Entonces, de acuerdo con la ecuación (15), la varianza de p_t puede expresarse como:

$$\text{var } p_t = \sigma_u^2 \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i^2 = \sigma_u^2 \left\{ \pi_0^2 + \left[[1 + \delta_1 (1-\beta)] \pi_0 + 1 \right]^2 \sum_{i=1}^{\infty} [1 + \delta_1 (1-\beta)]^{2i} \right\} \quad (34)$$

Si $|1 + \delta_1 (1 - \beta)| > 1$, el único valor de π_0 que resulta en una varianza finita para p_t es $\pi_0 = \frac{-1}{1 + \delta_1 (1 - \beta)}$. Por lo tanto, cuando $|1 + \delta_1 (1 - \beta)| > 1$, la condición de estabilidad (o de varianza finita) proporciona una distribución única para el nivel de precios. Este último puede representarse en la siguiente forma:

$$p_t = -\delta_0 \delta_1^{-1} (1-\beta)^{-1} - \frac{1}{1 + \delta_1 (1-\beta)} u_t \quad (35)$$

Supongamos ahora que hay una razón estructural por la cual existen equilibrios múltiples (es decir, $-2 < \delta_1 < 0$). En este caso, el Banco Central siempre podría generar un único equilibrio si adopta una política monetaria que resulte en $|1 + \delta_1 (1 - \beta)| > 1$. Si el banco fija un valor de $\beta > 1$, entonces $1 + \delta_1 (1 - \beta) > 1$ y la condición de varianza finita será otra vez suficiente

para eliminar los equilibrios múltiples. Esto último implica que el Banco debería accionar adoptando una política que fuera más que "acomodativa" del nivel de precios.

En nuestra versión modificada del modelo de Taylor, la proposición de neutralidad de Sargent y Wallace 10/, de acuerdo a la cual toda política monetaria sistemática no tiene efecto sobre la distribución probabilística del output, pier de validez, como se demostrará a continuación.

Usando (4'), (12) y (35) para sustituir por m_t , u_t y p_t , respectivamente, y reordenando términos, se obtiene la siguiente representación para el output:

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 m + \phi_1 b_0 b_1^{-1} + e_{2t} \left[1 + \frac{\phi_1 (1-\beta)(\gamma_1^{-1} + \alpha_1^{-1})}{1 + b_1(1-\beta)} \right] + \frac{\phi_1 (1-\beta) \alpha_1^{-1}}{1 + b_1(1-\beta)} e_{3t} - \frac{\phi_1 (1-\beta) \gamma_1^{-1}}{1 + b_1(1-\beta)} e_{1t}. \quad (36)$$

Las expresiones (36) y (11) demuestran que, para $\phi_1 > 0$, la distribución de y_t depende del parámetro de política monetaria β . Es decir, mientras una política monetaria sistemática carece de efecto sobre la distribución del output en el modelo original de Taylor, nuestra versión modificada de dicho modelo implica que una política de tal tipo no es neutral, aún cuando el gobierno no tenga ventajas de información sobre el público.

Además, debemos mencionar que en nuestro modelo, los problemas de no unicidad pueden ser causados por la política monetaria en sí misma. Supongamos que $b_1 > 0$, es decir, que no existen razones estructurales que pudieran generar no unicidad. Entonces, el gobierno estará generando equilibrios múltiples si fija un valor de β tal que $1 < \beta < \frac{2}{b_1} + 1$.

10/-Sargent, T.J. and N. Wallace, 1975, op. cit.

Por otra parte, una política monetaria que establezca un valor de β tal que $0 < \beta < 1$ no será capaz de eliminar los equilibrios múltiples si $-2 < \delta_1 < 0$. En ambos casos, nuestro supuesto de que el público forma expectativas de acuerdo con el criterio de "mínima pérdida" nos permite obtener una solución única para nuestro modelo macroeconómico.

Las condiciones de primero y segundo orden para un mínimo proporcionan el siguiente valor requerido para $\bar{w}_0$:

$$\bar{w}_0 = \frac{-[a\phi_1^2(\beta-1)^2 + b]\sigma_u^2 \sum_{i=0}^{\infty} [1 + \delta_1(1-\beta)]^{2i+1} - a\phi_1(\beta-1)(\gamma_1^{-1} + a_1^{-1})\sigma_{e2}^2}{\sigma_u^2 [a\phi_1^2(\beta-1)^2 + b][1 + \sum_{i=0}^{\infty} [1 + \delta_1(1-\beta)]^{2(i+1)}]} \quad (37)$$

Las representaciones únicas resultantes para p_t y para y_t dependerán del parámetro de política β . Entonces, la imposición de nuestro criterio de "mínima pérdida" nos permite obtener unicidad para cualquier valor de $\beta \neq 1$. Taylor llega a una conclusión similar después de la imposición de su condición de mínima varianza para el nivel de precios. En su modelo, sin embargo, ambos criterios proporcionan resultados idénticos debido a que la distribución del output no depende de la política monetaria.

V. Conclusiones.

El propósito de este ensayo ha sido el de introducir un criterio más general para la obtención de soluciones únicas en modelos macroeconómicos estocásticos con expectativas racionales. Las modificaciones introducidas en la estructura de información del modelo de Taylor resultan en la generación de un trade-off entre la varianza del nivel de precios y la varianza del output. Si nosotros asumimos que el público actúa colectivamente de forma tal de minimizar una función de pérdida que pondera con peso positivo tanto la varianza del nivel de precios como la varianza del output, entonces, obtendremos nuevamente una solución única. Aunque nuestro criterio es más general que el propuesto por Tay-

lor, el mero hecho de que el público toma en consideración dos variables en lugar de tan solo una y de que diferentes individuos tendrán en general diferentes preferencias sobre las variabilidades del nivel de precios y del output, hace dificultoso creer que los participantes en el mercado "acordarán" minimizar la mencionada función de pérdida adoptando dicho tipo de racionalidad colectiva. Teniendo en cuenta que la distribución de precios resultante dependerá de las preferencias promedio del público, cada agente racional presumiblemente formará sus expectativas prediciendo las preferencias que la opinión pública promedio tiene sobre las varianzas del output y del nivel de precios, y las preferencias que la opinión pública promedio cree que tiene la opinión pública promedio, y así sucesivamente, ad infinitum. Dado que hay muchas distribuciones del nivel de precios y del output que son confirmadas por el modelo, la economía puede fácilmente quedar "atrapada" en un equilibrio estocástico subóptimo en el cual los participantes en el mercado son incapaces de descubrir que están formando predicciones erróneas de las preferencias inherentes a la opinión pública promedio.

Apéndice

En este apéndice, nosotros presentamos un ejemplo en el cual la condición de mínima varianza para el output genera una varianza infinita para el nivel de precios. Consideremos el siguiente modelo:

$$y_t^s = (p_t - w_t) + e_{1t} = (p_t - E_{t-1} p_t) + e_{1t}, \quad (1''')$$

$$w_t = E_{t-1} p_t, \quad (2''')$$

$$y_t^d = -a_1 (i_t - E_t p_{t+1} + p_t) + e_{2t}, \quad (3''')$$

$$m_t^d - p_t = y_t - a_3 i_t + e_{3t}, \quad (4''')$$

$$m_t^s = m, \quad (5''')$$

donde (1'''), (3'''), (4''') y (5''') representan a la función de oferta agregada, a la función de demanda agregada, a la función de demanda de dinero y a la oferta fija, respectivamente. El salario nominal correspondiente al período t es negociado al finalizar el período $t-1$ de acuerdo a la ecuación (2''') (ver la sección sobre contratos salariales de un período de duración en Fischer, S., 1977, "Long-Term Contracts, Rational Expectations, and the Optimal Money Supply Rule", Journal of Political Economy 85, February, 191-206).

La solución del modelo proporciona la siguiente expresión:

$$p_t \left(1 + \frac{2a_1}{a_3} + a_1\right) - E_{t-1} p_t \left(1 + \frac{a_1}{a_3}\right) - a_1 E_t p_{t+1} = \frac{a_1}{a_3} m + u_t,$$

$$\text{where } u_t = e_{2t} - e_{1t} \left(1 + \frac{a_1}{a_3}\right) - \frac{a_1}{a_3} e_{3t}.$$

El nivel de precios puede ser representado como

$$p_t = \bar{p} + \sum_{i=0}^{\infty} w_i u_{t-i}.$$

Luego, resolviendo por coeficientes indeterminados, se obtiene

$$\bar{p} = m, \quad \pi_1 = \frac{\frac{a_1 + 2a_1 + a_1 a_3}{a_3 a_1}}{\pi_0 - \frac{1}{a_1}},$$

$$\pi_{i+1} = \frac{\frac{a_1 + a_1 a_3}{a_3 a_1}}{\pi_i} \quad (i=1, 2, 3, \dots)$$

Además, la varianza del output resulta ser

$$\text{var}(y_t) = E\left(\bar{p} + \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i u_{t-i} - \bar{p} - \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i u_{t-i} + e_{1t}\right)^2$$

$$= \pi_0^2 \sigma_u^2 - 2\pi_0 \left(\frac{a_1 + a_3}{a_3}\right) \sigma_{e1}^2 + \sigma_{e1}^2.$$

Las condiciones de primero y segundo orden para un mínimo implican que el valor requerido para π_0 es

$$\hat{\pi}_0 = \frac{(a_1 + a_3)}{a_3} \frac{\sigma_{e1}^2}{\sigma_u^2}.$$

Por otra parte, la varianza del nivel de precios puede expresarse de la siguiente manera:

$$\text{var}(\hat{p}_t) = \sigma_u^2 \left[\pi_0^2 + \left(\frac{a_1 + 2a_1 + a_1 a_3}{a_3 a_1} \pi_0 - \frac{1}{a_1} \right)^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{a_1 + a_1 a_3}{a_3 a_1} \right)^{2i} \right]$$

Esta varianza tiene un valor finito solamente para

$$\pi_0 = \frac{a_3}{(a_3 + 2a_1 + a_1 a_3)} = \hat{\pi}_0.$$

La adopción del criterio de mínima varianza para el output resulta en una varianza infinita para el nivel de precios. Si el público adopta un criterio de "mínima pérdida" cuando forma sus expectativas, es razonable presumir que otorgará una ponderación no nula a la varianza del nivel de precios en la función de pérdida. Haciendo esto último, los agentes racionales lograrán una varianza finita para el nivel de precios al costo de generar una varianza mayor que la mínima para el output.