RELACIONES TECNICAS DE CAPITAL EN LA TABLA DE INSUMO-PRODUCTO

Ruby Daniel Hernández(*)

(*) Universidad Nacional de La Plata(UN La Plata).

A. INTRODUCCION

En el contexto de la llamada función de producción y de su forma reducida, la función de costos economica, ligadas ambas a la función de costos contable, que opera como restricción presupuestaria en los problemas de optimización, se plantean problemas de medición y de representación formal. Estos problemas surgen en relación al tratamiento operacional de principios, hipótesis y/o supuestos tales como: progreso técnico, organización empresarial, economías externas, sustitución, complementariedad, rendimientos a escala.

En relación a la tabla de Insumo-Producto, se confronta su capacidad de respuesta acerca de dichos principios, hipótesis y/o supuestos.

En términos de su representación formal, la tabla expresa, a través de relaciones contables, el proceso de medición de las variables reales que definen el sistema económico. A través de un sistema lineal de ecuaciones que reproduce las relaciones contables se da forma, por otro lado, al modelo de Insumo-Producto(21,22).

En relación al modelo se incorpora un presupuesto de proporcionalidad que se ajusta a las relaciones contables(éstas son lineales por la naturaleza descriptiva y deterministica de sus operaciones) y del cual se derivan los coeficientes de las relaciones técnicas de producción. Así surge la matriz A de requerimientos directos, y mediante operaciones matriciales se tiene la matriz de requerimientos directos e indirectos, $(I-A)^{-1}$, ó sea la llamada matriz inversa de Leontief.

El nivel descriptivo y las hipotesis de bajo nivel que contiene asemeja el modelo a las cajas negras de la cibernética : se requiere incorporarles lenguajes teóricos que generen explicaciones.

Por las caracteristicas señaladas, se suscitan problemas de interpretación sobre la forma en que operan en la tabla y modelo de Insumo-Producto, los principios, hipotesis y/ó supuestos antes citados.

En lo que se refiere al principio de sustitución , su no admisibilidad(31) es una consecuencia de la exclusión en el modelo de procesos alternativos y de la hipotesis de proporcionalidad. No obstante, puede recuperarse el tratamiento analítico de este principio al flexibilizarse el modelo en otros, de programación matemática y/ó econométricos.

Por el contrario, la hipotesis de complementariedad entre factores y/ó entre actividades surge explicitamente. Este principio de real importancia en los estudios sobre el crecimiento y el desarrollo, es una de las contribuciones más sustantivas de la tabla de Insumo-Producto.Esta hipotesis no reconoce un tratamiento similar en ninguna de las funciones de producción convencionales.

Los temas relacionados con el progreso técnico, organización empresarial y economias externas siguen siendo muy complejos y en buena medida intratables para cualquier tipo de relación técnica de producción.

Finalmente, en relación a los rendimientos a escala, la interpretación más divulgada afirma que,por la hipotesis de linearidad en la tabla de Insumo-Producto, sólo se admiten los rendimientos constantes a escala. La severidad de esta limitación se torna más evidente en el caso de los rendimientos crecientes que ofrecen una doble particularidad: por un lado, gravita en la evolución de las economias modernas, por otro, su tratamiento analítico desmorona construcciones teóricas, sólo consistentes bajo el supuesto de rendimientos constantes.

En este problema de los rendimientos a escala concentraremos la primera parte del trabajo. Postularemos y demostraremos la existencia de rendimientos no constantes a escala en la tabla de Insumo-Producto, mediante la transformación de un sistema no lineal tipo Cobb-Douglas (su estimación no restringida admite todo tipo de rendimientos) en otro lineal, tipo Leontief.

En la segunda parte del trabajo se reseñan brevemente resultados sobre solución de sistemas de ecuaciones , a la par que se incorporan a la Teoría Lineal, desde el punto de vista estructural los resultados que surgen de la transformación lineal.

B. RELACIONES TECNICAS DE PRODUCCION. MEDICION.

A fin de mostrar la existencia de rendimientos no constantes a escala en el modelo de Insumo-Producto, se reseñan las caracteristicas esenciales de la función de producción a utilizar, la función de costos economica y la función de costos contable, a la vez que se establecen las relaciones entre las mismas y se definen los procesos de medición más relevantes.

1) Función de producción tipo Cobb-Douglas.

Se utiliza una función ampliada de producción. Usualmente, la función relaciona, en cantidades físicas, el valor agregado sectorial con los recursos primarios, trabajo y capital. En la función ampliada se relaciona la producción bruta sectorial con la totalidad de los insumos y los recursos primarios. Así se facilita la comparabilidad con las funciones de producción tipo Leontief.

$$\bar{X}_j = \left(\prod_{i} \bar{X}_{ij}^{\alpha_{ij}}\right) \cdot \left(\bar{Y}_{oj}\right)^{\beta_{oj}} \qquad (j= 1,2,\ldots,n) \quad (1)$$ donde:

$\bar{X}_j$ = producción bruta sectorial en cantidades físicas.(j=1,2,..,n

$\prod_i \bar{X}_{ij}$ = total insumos intermedios de los sectores i necesarios para producir el bien j, en cantidades físicas (i=1,2,...,n). En adelante, a fin de facilitar la notación: $\prod_i \bar{X}_{ij} = \bar{X}_{ij}$

α_{ij} = coeficientes técnicos referidos al consumo intermedio; expresan la elasticidad de la producción bruta sectorial respecto del consumo intermedio.

$\bar{Y}_{oj}$ = valor agregado sectorial, en cantidades físicas.

β_{oj} = coeficientes de participación del valor agregado sectorial en la producción bruta sectorial; expresan la elasticidad de la producción bruta sectorial respecto del valor agregado sectorial

$$\therefore \quad \boxed{\bar{X}_j = \bar{X}_{ij}^{\alpha_{ij}} \cdot \bar{Y}_{oj}^{\beta_{oj}}} \qquad (2)$$

2. Función de producción tipo Leontief.

La relación fundamental matricial del modelo de Insumo-Producto es:

$$X = (I-A)^{-1} . G \qquad (3)$$ donde:

X = vector columna de la producción bruta sectorial, en valores monetarios;

A = matriz cuadrada (nxn) de requerimientos directos: la forman los coeficientes técnicos que surgen de la razón $X_{ij}/X_j = a_{ij}$. X_{ij}, insumos del sector i necesarios para la producción en el sector j, en valores monetarios. a_{ij}, coeficientes técnicos que expresan los requerimientos directos al sector i por el sector j para producir una unidad de producto.

$(I-A)^{-1}$ = matriz cuadrada(nxn) , llamada matriz inversa de Leontief. refleja los requerimientos directos e indirectos del sistema productivo, como consecuencia de cambios en el vector G.

G = vector columna de la demanda final sectorial, en valores monetarios.

También se definen :

$$b_{oj} = \frac{\bar{Y}_{oj}}{X_j} \qquad (4)$$ donde:

b_{oj} = coeficiente de participación del valor agregado sectorial en la producción bruta sectorial . ($j = 1,2,...,n$).

Y_{oj} = valor agregado sectorial j , en valores monetarios.

Una columna cualquiera de la Matriz A, más la respectiva celda del vector fila que se forma con los b_{oj} de la ecuación 4 , describe la función de producción tipo Leontief:

$$X_j = \min \left[\frac{X_{1j}}{a_{1j}} , \frac{X_{2j}}{a_{2j}} , \ldots , \frac{X_{nj}}{a_{nj}} , \frac{Y_{oj}}{b_{oj}} \right]$$

$$X_j = \min \left[\frac{\sum X_{ij}}{\sum a_{ij}} , \frac{Y_{oj}}{b_{oj}} \right] \qquad (j = 1,2,\ldots,n)$$

Haciendo : $\sum X_{ij} = X_{ij}$ y $\sum a_{ij} = a_{ij}$;

$$\boxed{X_j = \min \left[\frac{X_{ij}}{a_{ij}} , \frac{Y_{oj}}{b_{oj}} \right]} \qquad (5)$$

Notese que mientras la función de producción tipo Cobb-Douglas se expresa en cantidades físicas , que es lo correcto teoricamente, la función de producción tipo Leontief, lo hace en valores monetarios. Más adelante volveremos sobre este aspecto.

3. Función de costos contable.

Esta función, por su naturaleza contable, es lineal. Describe los costos de producción en términos monetarios, y se la utiliza como restricción presupuestaria en problemas de optimización:

$$\boxed{C_j = P_{ij}\bar{X}_{ij} + w_{oj}\bar{Y}_{oj}} \qquad (6)$$ donde:

C_j = costos totales de producción sectorial, en valores monetarios ($j= 1,2,\ldots,n$);

P_{ij} = precio unitario de los insumos intermedios provenientes del sector i necesarios en la producción del sector j.

w_{oj} = precio unitario del valor agregado sectorial j.

Notese que : $P_{ij}\bar{X}_{ij} = X_{ij}$; $w_{oj}\bar{Y}_{oj} = Y_{oj}$ $\therefore$ $C_j = X_j$

También : $P_j\bar{X}_j = X_j$; P_j, es el precio unitario del producto sectorial j. Por lo tanto : $C_j = X_j = P_j\bar{X}_j$

La ecuación 6 es equivalente a una columna cualquiera de la tabla de flujos interindustriales ; a partir de ésta se derivan los coeficientes a_{ij}, b_{oj}, mediante la hipotesis de proporcionalidad que compara los flujos citados con la producción bruta sectorial.

4. Función de costos economica.

En base a la función de producción de la ecuación 2 y la función de costos contable de la ecuación 6 (ambas conforman un sistema de relaciones estructurales) se deriva la forma reducida (24) , esto es, la función de costos economica.

Bajo el supuesto de máximo beneficio (Π_j) se tiene:

$$\text{Max. } \Pi_j = P_j\bar{X}_j - P_{ij}\bar{X}_{ij} - w_{oj}\bar{Y}_{oj} \tag{7}$$

La derivación parcial de los beneficios respecto de los insumos y del valor agregado, arroja varias relaciones . Entre ellas:

$$\frac{\alpha_{ij}}{\beta_{oj}} = \frac{P_{ij}\bar{X}_{ij}}{w_{oj}\bar{Y}_{oj}} \tag{8}$$

$$\therefore \quad P_{ij}\bar{X}_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{\beta_{oj}} \cdot w_{oj}\bar{Y}_{oj} \tag{9}$$

Reemplazando la ecuación 9 en la ecuación 6 (función de costos contable) se tiene:

$$C_j = w_{oj}\left(\frac{\alpha_{ij} + \beta_{oj}}{\beta_{oj}}\right) \cdot \bar{Y}_{oj} \tag{10}$$

Expresando las ecuaciones 2 y 8 en término de las variables $\bar{Y}_{oj}$ y $\bar{X}_{ij}$, en pocos pasos se llega a :

$$\bar{Y}_{oj} = \left[\bar{X}_j \left(\frac{oj \cdot P_{ij}}{ij \cdot w_{oj}}\right)^{\alpha_{ij}}\right]^{1/(\alpha_{ij} + \beta_{oj})} \tag{11}$$

Reemplazando $\bar{Y}_{oj}$ de la ecuación 11 en la ecuación 10, se tiene:

$$C_j = w_{oj}\left(\frac{\alpha_{ij}+\beta_{oj}}{\beta_{oj}}\right)\left[\bar{X}_j \cdot \left(\frac{\beta_{oj}\cdot p_{ij}}{\alpha_{ij}\cdot w_{oj}}\right)^{\alpha_{ij}}\right]^{1/(\alpha_{ij}+\beta_{oj})} \quad (12$$

La función de costos economica depende de los precios unitarios de los insumos (p_{ij}), del precio unitario del valor agregado (w_{oj}) y del nivel de la producción bruta sectorial en cantidades físicas ($\bar{X}_{ij}$).

Si la función de producción es de rendimientos constantes a escala, ($\alpha_{ij} + \beta_{oj} = 1$), la función de costos economica se reduce a :

$$\boxed{C_j = \frac{w_{oj}}{\beta_{oj}}\left(\frac{\beta_{oj}\cdot p_{ij}}{\alpha_{ij}\cdot w_{oj}}\right)^{\alpha_{ij}} \cdot \bar{X}_j} \quad (13)$$

$$\therefore \quad C_j = \delta_j \bar{X}_j \quad (14)$$

δ_j = pendiente de la función de costos lineal (rendimientos constantes). También es el precio unitario del producto $\bar{X}_j$.

El precio unitario del producto se deriva de las relaciones que, en el proceso de maximización de los beneficios, expresan la remuneración de los insumos y del valor agregado en términos de su productividad marginal :

$$\alpha_{ij} = \frac{P_{ij}\cdot \bar{X}_{ij}}{P_j \cdot \bar{X}_j} \quad (15)$$

$$\beta_{oj} = \frac{w_{oj}\cdot \bar{Y}_{oj}}{P_j \cdot \bar{X}_{oj}} \quad (16)$$

En la ecuación 16 se extrae P_j:

$$P_j = \frac{w_{oj}}{\beta_{oj}} \cdot \frac{\bar{Y}_{oj}}{\bar{X}_j} \quad (17)$$

En la ecuación 11, bajo el supuesto de rendimientos constantes a escala, se tiene:

$$\frac{\bar{Y}_{oj}}{\bar{X}_j} = \left(\frac{\beta_{oj} \cdot P_{ij}}{\alpha_{ij} \cdot w_{oj}}\right)^{\alpha_{ij}} \quad (18)$$

Reemplazando $\bar{Y}_{oj}/\bar{X}_j$ de la ecuación 18, en la ecuación 17 :

$$P_j = \frac{w_{oj}}{\beta_{oj}} \left(\frac{\beta_{oj} \cdot P_{ij}}{\alpha_{ij} \cdot w_{oj}}\right)^{\alpha_{ij}} = \delta_j \quad (19)$$

$$\therefore \quad C_j = P_j \bar{X}_j \quad (20)$$

Por otra parte, sumando las ecuaciones 15 y 16 :

$$(\alpha_{ij} + \beta_{oj}) \cdot P_j \bar{X}_j = P_{ij} \bar{X}_{ij} + w_{oj} \bar{Y}_{oj} = C_j = X_j \quad (21)$$

es decir, resulta la ecuación 6 de costos contables.

5. Relación entre las funciones de producción no lineal y lineal.

Los segundos miembros de las ecuaciones 15 y 16 , constituyen las mismas razones que en la ecuación 6 determinan los coeficientes a_{ij}, b_{oj}. Por lo tanto:

$$\boxed{\alpha_{ij} = a_{ij}} \quad (22)$$

$$\boxed{\beta_{oj} = b_{oj}} \quad (23)$$

Para que esto ocurra deben tener vigencia los supuestos, entre otros, de competencia perfecta, rendimientos constantes a escala e igualación de ingresos y costos. En este caso, el problema de expresar la tabla de Insumo-Producto en valores monetarios se diluye, ya que los precios vienen dados por el mercado, libre de influencias tanto de oferentes como de demandantes. Los coeficientes tipo Leontief son, en este caso, de naturaleza estrictamente tecnológica.

Sin embargo, el problema de la formación de precios para el sistema Leontief es muy diferente en relación a la concepción marginalista ; en ésta, el principio de sustitución es esencial en la formación de los precios. La tabla de Insumo-Producto excluye, precisamente dicho principio. Esto presupone imperfecciones en el mercado (35).

Retornando a la igualdad entre los coeficientes de los dos sistemas analizados, las ecuaciones 15 y 16 pueden expresarse :

$$\alpha_{ij} \cdot \left(\frac{P_j \bar{X}_j}{P_{ij} \bar{X}_{ij}} \right) = 1 \qquad (24)$$

$$\beta_{oj} \cdot \left(\frac{P_j \bar{X}_j}{w_{oj} \bar{Y}_{oj}} \right) = 1 \qquad (25)$$

Las razones entre parentesis son las reciprocas de los coeficientes del sistema Leontief :

$$\boxed{\alpha_{ij} \cdot \left(\frac{1}{a_{ij}} \right) = 1} \qquad (26)$$

$$\boxed{\beta_{oj} \cdot \left(\frac{1}{b_{oj}} \right) = 1} \qquad (27)$$

Graficamente, la igualdad entre los coeficientes se expresa en figura siguiente:

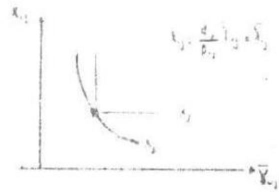

Gráfico 1

La isocuanta tipo Leontief, rectangular, intersecta, en la solución de equilibrio, a la isocuanta tipo Cobb-Douglas. Como el sendero de expansión es el mismo para ambos sistemas , se concluye pues, en la igualdad entre ambos tipos de coeficientes.
En el caso de registrarse imperfecciones en el mercado, éstas influyen sobre los precios, a través de los coeficientes de elasticidad de demanda (η_j) y de aquellos referidos a los insumos y recursos primarios(coeficientes de elasticidad de oferta - ϵ_{ij}, ϵ_{oj} -)

Por lo tanto :

$$P^*_j = P_j \left(1 - \frac{1}{\eta_j} \right) \tag{28}$$

$$P^*_{ij} = P_{ij} \left(1 + \frac{1}{\epsilon_{ij}} \right) \tag{29}$$

$$w^*_{oj} = w_{oj} \left(1 + \frac{1}{\epsilon_{oj}} \right) \tag{30}$$

En este caso,los coeficientes de la tabla de Insumo-Producto expresarán las influencia de la tecnología y de las imperfecciones del mercado conjuntamente.
Hasta aquí, los trabajos en especial los de Klein (17,18) tratan este tipo de problemas en relación al sistema no lineal , tipo Cobb-Douglas, y el lineal, tipo Leontief.

Para nosotros, la interrupción de las equivalencias entre los dos sistemas originado por los rendimientos no constantes a escala plantea los siguientes interrogantes:

i) Si la transformación del sistema no lineal en lineal sólo tiene validez para el caso de rendimientos constantes a escala, entonces, se anula la veracidad de la información contenida en la tabla para aquellas columnas que registran rendimientos no constantes(La tabla como contabilidad económica es una parte significativa del sistema de información estadistica economica);
ii) La pérdida de validez de esta información anula su relación con el sistema teórico que la ha generado.

Cabe anotar una paradoja: la misma información que resume la tabla de Insumo-Producto para variables como producción bruta sectorial, consumo intermedio sectorial y valor agregado sectorial, es la que proporciona el sistema de cuentas nacionales periodicamente. Es la misma información que nutre la matriz de momentos para la estimación de los parámetros de una función tipo Cobb-Douglas en el proceso de indagación sobre los rendimientos.

6. Proceso de medición

Por su importancia para nuestro análisis, precisaremos las relaciones estructurales entre los sistemas: mundo real, información estadistica económica y cuerpo teórico.
Para simplificar el analisis se tomará la información estadistica económica como un conjunto no diferenciado(en la realidad existen subconjuntos constituidos por fuentes de información básica que se relacionan, a través de reglas y procedimientos específicos con el subsistema principal, contabilidad economica)
En forma similar a otros estudios(14)y en detalle en lo que concierne a los temas que nos interesan, se especifican los siguientes conjuntos:

$$N = \left\{ n_{1t}, n_{2t}, \ldots, n_{kt} \;\; ; \;\; t = 1,2,\ldots,T \right\} \qquad (31)$$

N, define el sistema mundo real, con elementos $n_{1t}, n_{2t}, \ldots, n_{kt}$ que identifican hechos ó fenómenos economicos, descriptos temporalmente;

$$I = \left\{ i_{1t}, i_{2t}, \ldots, i_{kt} \;;\; t = 1,2,\ldots,T \right\} \qquad (32)$$

I, define el sistema de información estadistica económica, con elementos (cuentas) : $i_{1t}, i_{2t}, \ldots, i_{kt}$, que miden los hechos ó fenómenos económicos, según reglas y procedimientos establecidos, en su sucesión temporal;

$$S = \left\{ s_{1t}, s_{2t}, \ldots, s_{kt} \;;\; t = 1,2,\ldots,T \right\} \qquad (33)$$

S, define el sistema teórico con elementos (variables) que identifican y fundamentan la medición de hechos o fenómenos económicos, a través de procesos lógico-simbólicos, en su sucesión temporal.

Con fines de simplificación también se excluye la dimensión espacio.

El producto cartesiano $A = I x N$, es el conjunto de todos los hechos ó fenómenos economicos que ocurren temporalmente.

El producto cartesiano $B = I' x N'$, es el conjunto delos hechos ó fenómenos observados temporalmente.

En cada t, el par ordenado $\alpha = (i \times n)$ corresponde al par ordenado, $\beta = (i' \times n')$.

Se define la aplicación λ de A en B :

$$\boxed{\alpha \longrightarrow \lambda(\alpha) = \beta} \qquad (34)$$

λ, es un operador de observación condicionado por los valores tomados anteriormente por el objeto α .

β, lo observado, es la imagen en función del tiempo t.

En general, se sostiene que el operador λ efectúa una suprayección en la aplicación descripta en 34; esto implica una pérdida de información que se reduce mediante la clasificación de los objetos, a través de reglas y procedimientos contenidos en el operador λ. También se trata de una relación homomórfica, lo que permite conservar las leyes (operaciones) en las dos estructuras analizadas.

Finalmente, la reconstrucción del mundo real es sólo simbólica, partiendo de B.

El producto cartesiano $C = I \times S$, es el conjunto de los hechos ó fenómenos económicos mensurables, y con significación teórica a través del tiempo.

Si la información estadística económica fuese completa, para cada t, el par ordenado $\beta = (i' \times n')$ corresponde al par ordenado $\Phi = (i \times s)$.

Se define una aplicación γ de B en S:

$$\boxed{\beta \longrightarrow \gamma(\beta) = \Phi} \qquad (35)$$

γ, es un operador semántico, que reune los requerimientos teóricos y de modelización necesarios para el sistema de decisiones. Está condicionado parcialmente por los valores que toma la imagĕn.

Φ, es la base de datos con significación teórica, como resultado de la aplicación γ.

En lo que se refiere a la relación 35 se aplica un razonamiento analogo al anterior en términos de suprayección y homomorfismo.

El operador semântico γ condiciona, mediante procesos lógicos, reglas y procedimientos, la clasificación de los objetos,

La aplicación compuesta es:

$$\boxed{\alpha \longrightarrow \gamma\lambda(\alpha) = \Phi} \qquad (36)$$

$\gamma\lambda$, operador epistemológico, a través del cual γ y λ, integran el conjunto de requrimientos teóricos y técnicos.

En el mismo sentido, si se continúa la cadena de razonamientos

a través de los operadores de decisión y de acción, se apreciará el proceso de retroacción que reintegra el proceso a los elementos del mundo real, aunque simbolicamente.
La interrupción de la cadena de razonamientos revela algún tipo de inconsistencias en los operadores.
Por lo tanto, la preservación de las aplicaciones tal como se describieron, implica que el sistema contable de información estadistica económica (la tabla de Insumo-Producto es una parte significativa de dicho conjunto) es consistente con las formulaciones teóricas y la realidad(mundo real).
Como se señaló el subsistema contable (tabla de Insumo-Producto) se transforma en el modelo de Insumo-Producto , a través de simples ecuaciones algebraicas que se forman a partir de la hipotesis que pertenece al nivel contable (proporcionalidad). Por lo tanto, el mundo lineal o no lineal es reflejado en el sistema Leontief.
Es decir, si la transformación del sistema no lineal tipo Cobb-Douglas, al lineal tipo Leontief no se completa, lo que se cuestiona es la información de base contable.

7. Transformación Lineal.

Si $\mathcal{A} = \{\alpha_{ij}\ ;\ i=1,2,\ldots,n; j= 1,2,\ldots,n\}$ y $A = \{a_{ij}\ ;\ i= 1,2,\ldots,n\ ;\ j = 1,2,\ldots,n\}$, entonces, existe un factor de corrección, tal que: $\mathcal{O}_{ij}(\mathcal{A}) \longrightarrow A$.

Partimos para la demostración del proceso de maximización de los beneficios, con precios que registran las imperfecciones del mercado (se indican con asteriscos):

$$\Pi_j^* = P_j^* \bar{X}_j - P_{ij}^* \bar{X}_{ij} - w_{oj}^* \bar{Y}_{oj} \qquad (37)$$

En este caso , si $\left(\alpha_{ij}^* + \beta_{oj}^* \gtrless 1\right)$, la condición de igualdad en las ecuaciones 24 y 25, no se cumplen.

En general :

$$\alpha^{*}_{ij}\left(\frac{P^{*}_{j}\cdot\bar{X}_{j}}{P^{*}_{ij}\cdot\bar{X}_{ij}}\right)=\emptyset_{ij} \qquad (38)$$

$$\beta^{*}_{oj}\left(\frac{P^{+}_{j}\cdot\bar{X}_{j}}{W^{+}_{oj}\cdot\bar{Y}_{oj}}\right)=\emptyset_{oj} \qquad (39)$$

Si $(\emptyset_{ij};\ \emptyset_{oj} = 1)$ la respectiva función de producción es de rendimientos constantes a escala, con todos sus atributos.
Si $(\emptyset_{ij};\ \emptyset_{oj} \gtrless 1)$ la respectiva función de producción es de rendimientos no constantes a escala (decrecientes o crecientes)

Las razones entre parentesis en las ecuaciones 39 y 40 reflejan los valores contables, tal como se describen en la tabla de Insumo-Producto. Como se tratan de sus valores reciprocos se tiene:

$$\alpha^{*}_{ij}\cdot\left(\frac{1}{a_{ij}}\right)=\emptyset_{ij} \qquad (40)$$

$$\beta^{*}_{oj}\cdot\left(\frac{1}{b_{oj}}\right)=\emptyset_{oj} \qquad (41)$$

Por lo tanto:

$$\boxed{a_{ij} = \frac{\alpha^{*}_{ij}}{\emptyset_{ij}}} \qquad (42)$$

$$\boxed{b_{oj} = \frac{\beta^{*}_{oj}}{\emptyset_{oj}}} \qquad (43)$$

En forma matricial, expresamos la matriz A^{*} que es equivalente a la matriz A, en tanto el vector B^{*} es equivalente al vector B :

$$
\overset{A^{+}}{\begin{bmatrix}
\frac{\dot{\alpha}_{11}}{\varnothing_{11}} & \frac{\dot{\alpha}_{12}}{\varnothing_{12}} & \cdots\cdots & \frac{\dot{\alpha}_{1n}}{\varnothing_{1n}} \\
\frac{\dot{\alpha}_{21}}{\varnothing_{21}} & \frac{\dot{\alpha}_{22}}{\varnothing_{22}} & \cdots\cdots & \frac{\dot{\alpha}_{2n}}{\varnothing_{2n}} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\dot{\alpha}_{n1}}{\varnothing_{n1}} & \frac{\dot{\alpha}_{n2}}{\varnothing_{n2}} & \cdots\cdots & \frac{\dot{\alpha}_{nn}}{\varnothing_{nn}}
\end{bmatrix}}
=
\overset{A}{\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn}
\end{bmatrix}}
$$

$$
B^{+} = \begin{bmatrix}
\frac{\dot{\beta}_{o1}}{\varnothing_{o1}} & \frac{\dot{\beta}_{o2}}{\varnothing_{o2}} & \cdots\cdots & \frac{\dot{\beta}_{on}}{\varnothing_{on}}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
b_{o1} & b_{o2} & \cdots\cdots & b_{on}
\end{bmatrix} = B
$$

Los factores de corrección producen una transformación lineal completa , a la par que preservan las propiedades del sistema transformado y las reglas y procedimientos de los operadores de observación, λ, y semántico, γ (operadores epistemológicos)

Conforme a las ecuaciones 38, 39 y 42,43 , es evidente que :

$$a_{ij} = f\,(\eta_j, \varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}, \alpha^{*}_{ij}) \tag{44}$$

$$b_{Oj} = f\,(\eta_j, \varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}, \beta^{*}_{ij}) \tag{45}$$

Los coeficientes de la tabla de Insumo-Producto, bajo rendimientos no constantes a escala, dependen de las imperfecciones del mercado y de la tecnologia, conjuntamente.

Graficamente, para el caso de rendimientos crecientes, el proceso de transformación lineal es el siguiente:

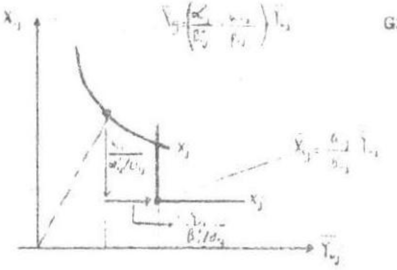

Gráfico 2.

8. Rendimientos no constantes a escala y el multiplicador de la demanda intermedia.

A través del multiplicador de la demanda intermedia se aprecian los efectos de los rendimientos no constantes a escala en la tabla de Insumo-Producto.

Similar al progreso técnico, con el que se confunde, el caso de los rendimientos crecientes implica una reducción en el nivel de los coeficientes, a_{ij}, por unidad de producto. Lo contrario ocurre con los rendimientos decrecientes. Asimismo, para el primer caso se incrementa el nivel del producto neto (crecen los b_{oj}); ocurre lo contrario para el segundo caso.

En otros términos, los coeficientes, a_{ij} y b_{oj}, no son indiferentes a los tipos de rendimientos.

En un sistema de dos sectores, el comportamiento del multiplicador de la demanda intermedia se expresa en ocho multiplicadores que traducen los efectos directos e indirectos de un proceso con rendimientos no constantes a escala, por ejem. crecientes.

En general se tiene:

$$\boxed{\frac{\partial X_i}{\partial a_{ij}} = \frac{\lambda}{\Delta} X_j} \qquad (46)$$

X_i = producción bruta del sector i usados como insumos por el sector j, en valores monetarios.

a_{ij} = coeficientes técnicos de producción.

λ = coeficientes técnicos de producción de la matriz $(I-A)^{-1}$ que reflejan, en cada caso, los impactos directos e indirectos.

Δ = determinante de la matriz $(I-A)^{-1}$; por las condiciones de Hawkins-Simon, se tiene : $\Delta > 0$;

X_j = producción bruta sectorial j ; también son insumos para el sector i.

En la ecuación 46, todos los valores son positivos ; por lo tanto, una reducción de los coeficientes , a_{ij}, en la función que presente rendimientos crecientes, determinará una demanda de insumos menor por parte del sector j.

El multiplicador , $\frac{\lambda}{\Delta}$, es menor en todos los casos; con mayor intensidad para el sector de rendimientos crecientes.

C. ESTRUCTURAS.

1. Noción de estructura.

Una faceta dela evolución y madurez de la ciencia se aprecia a través del proceso de formalización. Por su intermedio se incorporan lenguajes que preservan el nivel teórico y facilitan su tratamiento operacional.
La formalización, mediante el uso de recursos lógicos y simbólicos, reduce las inconsistencias verbales, identifica consecuencias no obvias, supera inconsistencias lógicas y contrasta hipotesis teóricas con la realidad, a la par que perfecciona el campo de la predicción.
Este proceso se concreta en modelos matemáticos y matematico-estadisticos que reemplazan los enunciados verbales de la teoría, por otros simbólicos. De esta forma, un sistema (económico) es representado por un modelo; éste, como imágen simplificada de la realidad, tiene finalidades de explicación y predicción. Es decir, el modelo es un intermediario entre la teoría y la realidad. Esta se observa (medición) a través de las variables teóricas relevantes. En un modelo econométrico, los elementos significativos(variables) y sus relaciones(hipotesis) se expresan :

$$Y = \emptyset(X,u) \qquad (1)$$ donde:

Y, representa las y_i variables dependientes ó endógenas; X, las x_i variables independientes ó exógenas y u, la variable aleatoria que determina la naturaleza estocastica del modelo, indispensable para la estimación de los parámetros, $\emptyset$ (con ello, se confirman ó no las relaciones hipoteticas). La forma funcional, $\emptyset$, que se determina en el proceso de estimación, es una de las formas que se incluyen en $\emptyset$. La forma funcional resultante conforma una estructura económica. En nuestro caso, la formación del producto sectorial.

En el lenguaje matemático, la estructura define a un conjunto cuyos elementos muestran relaciones y leyes de composición.
Caracterizan a toda estructura matemática la especificación de axiomas y de operaciones. También lo abstracto de su razonamiento. Como contrapartida, este tipo de razonamiento puede aplicarse a una diversidad muy grande de casos concretos. Así, las estructuras algebraicas: grupos, anillos, cuerpos y espacios vectoriales se utilizan en la ingenieria, química, bilogia, economia, etc.
En economia, por ejemplo, se estudian en el contexto de algunas de estas estructuras , modelos compuestos de sistemas de ecuaciones algebraicas.
Los dos modelos que estudiamos en el capitulo anterior, identifican una estructura económica , mediante la estimación econométrica de sus parámetros (Cobb-Douglas), ó bien, mediante obervaciones puntuales (Leontief).
En general, conformado un modelo importa conocer la existencia de soluciones de equilibrio, la estabilidad y unicidad de la solución, así como la interpretación económica de estos resultados.
En lo que sigue nos concentraremos en lòs problemas que se relacionan con la existencia de soluciones de equilibrio . El tratamiento de estos temas se concreta a aquellos aspectos que son de significativa importancia resaltar , en têrminos de nuestro analisis sobre la transformación lineal .

2. Soluciones de equilibrio.

. Matrices. Rango.

Un sistema de m ecuaciones con n incognitas admite al menos una solución. La condición necesaria y suficiente es que el rango de la matriz de coeficientes sea igual al rango de la matriz aumentada. Esta es la llamada condición de Kronecker.

En el caso del modelo abierto de Leontief, sistema de ecuaciones lineales no homogeneo, se tiene:

$$(I-A)X = G$$

$$\therefore \quad \rho\left|(I-A) \,\vdots\, G\right| = \rho\left|(I-A)\right|$$

ρ, rango de la matriz aumentada es igual al rango de la matriz de coeficientes, ρ'. El sistema es consistente; la matriz de coeficientes es cuadrada ($m= n$) y se cumple ($\rho= n$) , por lo tanto el sistema admite solución única. La matriz (I-A) es regular .
La regularidad de la matriz, tiene inversa, surge entonces del valor del rango.
El rango es el orden de la submatriz más larga cuyo determinante es diferente de cero. En este caso se define tambien el número de vectores columna (fila) linealmente independientes de la matriz de coeficientes, con lo que se especifica el orden de la base del espacio vectorial.
Con esta condición se revela la importancia que para toda solución tiene el concepto de independencia lineal de vectores.
Como es natural, esta condición por su generalidad nada dice acerca de las condiciones económicas que debe reunir el sistema para su solución.

. Matrices. Menores principales.

La tabla de Insumo-Producto al presuponer la naturaleza reproductiva del sistema que analiza, no admite producciones negativas.La no negatividad de sus valores otorga a la tabla una consistencia interna que se deriva de las llamadas condiciones de Hawkins- Simon.
Estas condiciones constituyen un test de consistencia.
La existencia de una solución general se prueba por la citada condición, necesaria y suficiente, a la que se asocia una interpre-

tación económica (10,11).

La condición establece que para que las producciones brutas (X's) satisfagan la ecuación matricial, $(I-A)X = G$, para X's, todas positivas, los menores principales de la matriz $(I-A)$ serán todos positivos para cualquier conjunto de bienes finales, $G > 0$.

Los menores principales se evaluan a partir de la esquina superior izquierda:

$$\left|1-a_{11}\right| > 0 \; ; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \; ; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0 \; ; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La productividad del sistema requiere que cada sector satisfaga sus propias demandas y la de otros sectores.

Con menores principales negativos, se denuncia la presencia de un sector que requiere para producir una unidad de producto, algo más de una unidad en término de insumos.

La condición equivale, entonces, a:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1 \quad ; j = 1,2,\ldots,n.$$

Para que haya producciones netas positivas, la suma de los insumos será estrictamente menor que la unidad. En el caso de que alguna X fuese igual a cero:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1 \quad ; j=1,2,\ldots,n$$

. Matrices. No negativas e Indescomponibles. Raíces.

En este caso se analizan las propiedades de la matriz A, en relación a las matrices cuadradas no negativas e indescomponibles (5,8).

- Matriz cuadrada no negativa

A, es una matriz cuadrada no negativa ($A \geqslant 0$), si cada uno de los elementos es no negativo ($a_{ij} \geqslant 0$).

En términos económicos, una matriz no negativa refleja una propiedad estructural : la productividad del sistema económico.

- Matriz cuadrada indescomponible

A, es una matriz cuadrada indescomponible si premultiplicada(directa) y postmultiplicada(traspuesta) por una matriz de permutación (se forman permutando columnas en una matriz identidad) genera una matriz :

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix}$$

donde A_1, A_2, A_3 y A_4, son submatrices no nulas. Por el contrario , es descomponible si la matriz A_3 es una matriz nula, en tanto A_1, A_2 y A_4, son indescomponibles.
El analisis de la solución de equilibrio se realiza a través de los valores propios (eigenvalues) de la matriz A.
Si la matriz A es indescomponible, sus valores propios son solución de la ecuación caracteristica ó latente que se forma para dar respuesta al sistema :

$$\lambda x = A x \qquad (2)$$ donde:

x, es un vector λ veces multiplicado por sí mismo, siendo sus elementos positivos ($x \neq 0$).
La ecuación 2 es :

$$(\lambda I - A) x = 0 \qquad (3)$$

La solución para valores de $x > 0$, surge de la citada ecuación caracteristica ó latente:

$$\Phi(\lambda) = \det \left| \lambda I - A \right| = 0 \qquad (4)$$

λ son los valores propios (eigenvalues) de la matriz A, y coinciden con las raices del polinomio que resulta del determinante:

$$\phi(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_n \qquad (5)$$

x, es el vector de los valores propios (eigenvectores), asociados a los valores propios (eigenvalues, raices).

El teorema de Perron es una consecuencia del analisis de las raices

- existe una raiz, simple, real, positiva ($\lambda_1 > 0$) ;
- λ_1, es la raiz de mayor valor absoluto ;
- existe un vector propio, x , positivo, asociado a λ_1 ;
- λ_1, crece ó permanece invariable, cuando un elemento de A crece.

El teorema de Frobenius generaliza los resultados de Perron, a partir de una matriz cuadrada no negativa :

- existe una raiz, simple, real, no negativa ($\lambda_1 \geqslant 0$) ;
- λ_1, es laraíz de mayor valor absoluto, sean las restantes λ_i, reales o complejas : $\lambda_1 > |\lambda_i|$;
- existe un vector propio, x , no negativo ($x \geqslant 0$), asociado a la mayor raiz no negativa ($\lambda_1 \geqslant 0$) :
- λ_1, crece o permanece invariable, cuando cualquier elemento de A, crece.;
- si β, es un número real, la matriz ($\beta I - A$) tiene inversa, no negativa $\left[(\beta I - A)^{-1}\right] \geqslant 0$, sí y solo sí $\beta \geqslant \lambda_1$;
- si A', es la traspuesta de A : $\lambda_1(A) = \lambda_1(A')$.

En consecuencia, sí A, es una matriz cuadrada no negativa e indescomponible :

- λ_1, es la raiz máxima, simple, real, positiva ; $\lambda_1 \geqslant |\lambda_i|$, para toda raiz λ_i de A ;
- si $x \geqslant 0$, es $x \geqslant Ax$; x, es el vector propio asociado a la raiz de mayor valor, λ_1 .

Entonces, por la ecuación: $\lambda_1 x = Ax$, si $\lambda_1 < 1$, y , $x > 0$

$$x > Ax$$

El sistema es reproductivo (la producción excede el valor de los insumos) .

En el teorema de Frobenius: $\left[(\beta I - A)^{-1}\right] \geqslant 0$, sí y sólo sí : $\beta \geqslant \lambda_1$.

Asimismo, si el sistema es reproductivo, (I-A), será positivo.

Por lo tanto, para la matriz inversa de Leontief, se cumple:

$$\boxed{(I-A)^{-1} > 0 \quad ; \quad \lambda_1 < 1}$$

Se requiere entonces que : $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$ $(j = 1,2,\ldots,n)$; es decir, deben cumplirse las condiciones de Hawkins-Simon :

$$\boxed{\lambda_1 < 1, \text{ sí y sólo si : } \sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1 \; ; (j=1,2,\ldots,n)}$$

. <u>Teoremas del punto fijo</u>.

El modelo de Insumo-Producto puede interpretarse en términos walrasianos. Posee relaciones técnicas de producción con coeficientes fijos y describe un proceso con bienes intermedios y finales.

Sin embargo, no incorpora ningún supuesto sobre el comportamiento de los agentes económicos, y al excluir, en su versión ortodoxa, el principio de sustitución, anula el rol que este principio tiene, para la concepción marginalista, en la formación de los precios.

La interpretación del sistema de Leontief en el mundo del equilibrio competitivo general, exige, por lo tanto, incorporar los supuestos de la competencia perfecta, de la información perfecta sobre el futuro, el libre ingreso de las empresas en cada sector hasta que se anulen los beneficios, y la compensación de la oferta y la demanda en los distintos mercados.

Los agentes económicos reconocerán una única conducta maximidarora : los consumidores respecto de su utilidad; los productores en relación a sus beneficios.

La constancia en los gustos, tecnología, etc, derivan de suponer al sistema en estado estacionario.

Ciertas restricciones surgen de los teoremas del punto fijo; éstos definen conjuntos cerrados, acotados y convexos. En consecuencia se excluyen los rendimientos crecientes.

El sistema opera con excesos de oferta(demanda) que son función de los precios relativos y deben anularse, conforme a la ley de Walras , a fin de alcanzar el equilibrio.

Es decir, una solución de equilibrio competitivo de largo plazo, sujeta a las restrcciones enunciadas, requiere que en todos los mercados se registren precios y cantidades en equilibrio.

El proceso de ajuste para llegar al equilibrio fué resuelto por Walras mediante el tâtonnement (especie de anunciador de precios frente a lo cual, oferentes y demandantes fijan y cambian las cantidades hastas que se anulan los excesos).

Con el advenimiento de los teoremas del punto fijo, se logran soluciones robustas, por la naturaleza topológica de estos teoremas.

Excepto Wald (37), los estudios sobre soluciones deequilibrio, entre otros los realizados por Von Neumann (36), Arrow y Debreu(1) y Debreu (4) usan, los primeros, el teorema de Brouwer (3,7). y el último, el de Kakutani (15).

El teorema de Brouwer define un conjunto cerrado, acotado y convexo (simplejo S), tal que:

Si $x \to \Phi(x)$, es una aplicación contínua, punto a punto, del simplejo S, en sí mismo, entonces, existe un $x_0 \in S$, tal que $x_0 = \Phi(x_0)$

Esto es, existe un punto que es imagen de sí mismo.

Kakutani extiende el teorema de Brouwer a una aplicación que es de punto a conjunto.

. Matrices. Transformaciones diferenciables.

Una transformación lineal diferenciable en el mismo conjunto, perteneciente a una región abierta , se evalúa a través de la función Jacobiana que se define para la región abierta.
Si el Jacobiano (determinante de las derivadas primeras de las funciones de un sistema de ecuaciones evaluadas en un punto), es diferente de cero, la transformación es uno-a-uno.
En general, se dice que existe una solución y por ende, la función inversa. Pero ésto no siempre se cumple; de allí que se estudien soluciones más acotadas. Es decir, la solución puede existir para un entorno del punto que se evalua en la solución.
En estos casos, existe una transformación local (univalencia local) que asegura la inversa de la transformación local.
Este es el aspecto esencial de todo teorema sobre la existencia de soluciones únicas locales. Este tipo de soluciones se hallan en los teoremas de las funciones implícitas y se generalizan con el uso del Jacobiano.
Gale y Nikaido (6) generalizan los resultados sobre la univalencia local, en términos de condiciones que aseguran la univalencia global. Se parte de la propiedad de positividad de las submatrices menores de una matriz como condición de transformación univalente global, en una región rectangular. Llaman a estas matrices P matrices y una de ellas, por la positividad de los menores principales, es la matriz de Leontief.
Extienden, además resultados de la univalencia local, tal el caso de las transformaciones no lineales, a la univalencia global.
En la ecuación matricial de Leontief:

$$X = AX + G$$

el Jacobiano es :

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, \dots)}{\partial(x_1, x_2, \dots)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

La transformación diferenciable es una matriz Jacobiana tipo Leontief. La transformación es univalente y por la positividad de los menores principales, tiene inversa.

Tomemos, ahora, el sistema no lineal tipo Cobb-Douglas y evaluemos el mismo para la parte de los insumos intermedios, a fin de facilitar su comparación con la matriz A de Leontief.

Para los distintos insumos, en su forma logaritmica, se tiene:

$$\ln \bar{X}_1 = \alpha_{11} \ln \bar{X}_{11} + \alpha_{21} \ln \bar{X}_{21} + \dots + \alpha_{n1} \ln \bar{X}_{n1} + \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\ln \bar{X}_n = \alpha_{1n} \ln \bar{X}_{1n} + \alpha_{2n} \ln \bar{X}_{2n} + \dots + \alpha_{nn} \ln \bar{X}_{nn} + \dots$$

$$J = \frac{\partial(\ln \bar{x}_1, \dots)}{\partial(\ln \bar{x}_{1j} \dots)} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

En el caso de las transformaciones no lineales, el Jacobiano debe ser del tipo P matriz, Sin embargo, para mantenerse dentro de la región convexa que garantiza para los menores principales valores positivos, deberán dejarse de lado las ecuaciones con rendimientos crecientes, en especial cuando $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} > 1$; ($j = j, 2, \dots, n$).

En nuestro caso, los factores de corrección θ_{ij} que transforman el sistema no lineal tipo Cobb-Douglas, en otro lineal tipo Leontief, aseguran que el Jacobiano de la transformación no lineal sea de tipo Pmatriz, con sus menores principales positivos:

$$J = \frac{\partial(\ \ln \bar{X}_i\ )}{\partial(\ \ln X_{ij})} = \begin{vmatrix} \frac{\alpha'_{11}}{\varnothing_{11}} & \frac{\alpha'_{21}}{\varnothing_{21}} & \cdots & \frac{\alpha'_{n1}}{\varnothing_{n1}} \\ \frac{\alpha'_{12}}{\varnothing_{12}} & \frac{\alpha'_{22}}{\varnothing_{22}} & \cdots & \frac{\alpha'_{n2}}{\varnothing_{n2}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\alpha'_{1n}}{\varnothing_{1n}} & \frac{\alpha'_{2n}}{\varnothing_{2n}} & \cdots & \frac{\alpha'_{nn}}{\varnothing_{nn}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

. Matrices. Ideal de polinomios. Regularidad.

La matriz A, puede expresarse como una serie de potencia:

$$(I-A)\ (I + A + A^2 + A^3 + \dots + A^n\ ) = I - A^{n+1}$$

Cuando $n \to \infty$, $A \to 0$; en consecuencia :

$$(I + A + A^2 + A^3 + \dots + A^n\ ) = (\ I - A\ )^{-1}$$

Al ser A una matriz primitiva (8) (si una potencia de A es positiva, la matriz es primitiva : $A^p > 0$, sí $p \geq 1$) , la condición $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$ ($j= 1,2,\dots,n$) asegura que la secuencia A^n sea convergente.

Si se utiliza la serie de potencia para definir un polinomio con relación a la matriz A, se tiene:

$$P(A) = A^{n^2} + b_{n^2-1} A^{n^2-1} + \dots + b_1 A + b_0 \quad (6)$$

A, pertenece a un espacio vectorial E, de dimensión n^2, en tanto los coeficientes pertenecen al cuerpo K (cuerpo de los números reales).

Las matrices cuadradas A, forman un conjunto cerrado para la suma y la multiplicación; conforman, pues, una estructura de anillo. Estas matrices no son, en general, conmutativas, y no constituyen un anillo de integridad, al admitir divisores de cero.
En el caso del polinomio P(A) se tiene una aplicación identica de las matrices A (endomorfismo en el espacio vectorial E), lo que constituye un subanillo polinomial, conmutativo, asociado a la matriz A.
Hemos visto que la matriz cuadrada A tiene sus valores propios (raices) que se expresan en su polinomio caracteristico :

$$P(\lambda) = \lambda^{n^2} + b_{n^2-1}\lambda^{n^2-1} + \dots + b_1\lambda + b_0 \qquad (7)$$

Por el teorema de Cayley-Hamilton, una matriz cuadrada A satisface su ecuación caracteristica; esto es, el polinomio P(A) se anula :

$$P(A) = 0 \qquad (8)$$

las raices λ toman valores c ($c \in K$), que anulan P(A).
El polinomio, admite pues la raiz $A = \lambda I$, y es divisible por $(A-\lambda I)$.

Conforme al teorema fundamental del álgebra , se descompone la función racional P(A) (los coeficientes son números complejos que pueden reducirse a reales) en el producto de n factores lineales:

$$P(A) = (A-\lambda_1)(A-\lambda_2) \dots (A-\lambda_n) \qquad (9)$$

La aplicación identica de las A's conforma una combinación lineal ya que P(A) = 0, siendo los coeficientes en K, no nulos.
Por lo tanto, existe un polinomio no nulo que se anula al sustituir λ, por la aplicación de A.
Entonces; el conjunto de los polinomios $P \in K(x)$, tal que $P(A) = 0$

forma un ideal de polinomios no reducido a cero, ideal propio. Este ideal es generado por un ponomio mínimo de A, de grado s, positivo :

$$\Phi = \lambda^{s} + b_{s-1}\lambda^{s-1} + \ldots\ldots + b_1\lambda + b_o \qquad (10)$$

$$\Phi' = A^{s} + b_{s-1}A^{s-1} + \ldots\ldots + b_1 A + b_o \qquad (11)$$

La división euclidiana de Φ' por A permite obtener el cociente :

$$Q = A^{s-1} + b_{s-1}A^{s-2} + \ldots\ldots + b_2 A + b_1 \qquad (12)$$

Si $b_o \neq 0$, el resto (R) será no nulo : $R \neq b_o$

$$\therefore \Phi' = AQ + R = 0 \qquad (13)$$

$$R = -AQ \qquad (14)$$

$$b_o = A\left[-(A^{s-1} + b_{s-1}A^{s-2} + \ldots + b_2 A + b_1\right] \qquad (15)$$

$$\therefore I = A\left\{\frac{-(A^{s-1} + b_{s-1}A^{s-2} + \ldots + b_2 A + b_1}{b_o}\right\} \qquad (16)$$

b_o, de acuerdo a la ecuación caracteristica es el producto de las raices, y es, a su vez, el valor del determinante de la matriz A. Entre parentesis se tiene el adjunto de la matriz A. Por lo tanto, la matriz A es inversible.La matriz es regular y el sistema de ecuaciones linealmente independientes . Entonces: La condición necesaria y suficiente para que una matriz sea inversible es que el polinomio mínimo del ideal P(A) = 0 , asociado a A, tenga un término constante diferente de cero ($b_o \neq 0$)

El polinomio P(A) en el cuerpo de los números reales, es un ideal porque :

- contiene el polinomio nulo: P(A) = 0

- la diferencia entre elementos que pertenecen al ideal $\Theta[A]$, pertenece al mismo ideal :

$$R = \Psi' - A_1 Q \quad \begin{cases} R \in \Theta[A] \\ A_1 \in \Theta[A] \end{cases}$$

- el producto de un polinomio perteneciente al cuerpo $K[x]$, por otro, que pertenece al ideal $\Theta[A]$, pertenece al mismo ideal:

$$R = \Psi' - A_1 Q \quad \begin{cases} A_1 \in \Theta[A] \\ Q \in K[x] \end{cases}$$

Como se ha mostrado el ideal de polinomios se forma con el conjunto de los múltiplos del polinomio A.

Los seis tipos de solución analizados muestran una creciente complejidad en términos de los recursos formales utilizados.
En relación a la interpretación económica de las soluciones, los casos 2,3,5,6, difieren sustantivamente de la solución 4.
Las primeras recurren a un mínimo de supuestos económicos: el sistema económico debe ser reproductivo.
En los teoremas del punto fijo, por el contrario, la cantidad de supuestos es bastante mayor.
Este problema entra en el terreno de la validez ó no de los supuestos, en relación a su ligazón directa ó indirecta con la experiencia; por extensión al debate sobre los procesos lógicos de la abstracción (13,14,30)
En síntesis, los casos 2,3,5,6, eluden los problemas señalados al mantenerse en el contexto de supuestos no controvertidos.

3. Teoria Lineal

Los problemas de no linearidad, en particular los referidos a las funciones de producción con rendimientos crecientes (determinan regiones no convexas y costos medios decrecientes) , generan controversias en torno a dos cuestiones ; La existencia y la optimalidad de las soluciones de equilibrio y el rol jugado por el mecanismo de precios (13,14,23,25,39).
En lo referente a la existencia de no linearidades en el mundo real, su exclusión por parte de la teoria lineal (12) es objeto de severas criticas.
En este sentido, todos los estudios que intentan mostrar las posibilidades de transformación de sistemas no lineales en lineales,son de especial interês para la teoria lineal.
En esta dirección importa resaltar las contribuciones realizadas por Olivera (27,28); en ellas se utiliza el enfoque estructural.
Parte de una hipotesis estructural, que afirma la existencia de una correspondencia biunivoca entre procesos y estructura económica
La estructura se constituye con un sistema de ecuaciones algebraicas reales. Estos sistemas poseen, al menos, una raiz real.
Para que dos ó más sistemas de ecuaciones representen la misma estructura, deben admitir las mismas raices reales y estar sujetos al mismo cambio de estructura. De allí, el lemma que afirma lo anterior, sí y sólo sí los respectivos conjuntos de polinomios de ambos sistemas de ecuaciones , son base del mismo ideal.
La hipotesis estructural se prueba a nivel de los ideales de polinomios máximales (êstos poseen una sóla raiz e incluyen todos los polinomios que se anulan en el mismo)
En consecuencia, se establece la proposición que acota el dominio de validez de la hipotesis estructural a la clase de ideales maximales que poseen raiz real.
Con esta proposición y mediante la representación de la función

polinómica, a través de sus raices, se deriva la existencia de una matriz inversible, regular. Se tiene, pues, un sistema de ecuaciones linealmente independientes.
Por último se prueba lo mismo para sistemas de ecuaciones no lineales, siempre que pertenezcan a una clase,que se caracteriza por la condición de reducibilidad a la forma lineal.
Un teorema, sintetiza los resultados :
cada una de las cuatro afirmaciones siguientes implica las otras tres :

a) la hipotesis estructural es válida;
b) toda estructura económica admite representación lineal;
c) toda representación no lineal de una estructura económica es linearizable;
d) casi toda representación de una estructura economica es lineal.

En relación a los dos sistemas de ecuaciones que hemos estudiado en esté trabajo , establedemos :

1) La transformación del sistema no lineal en lineal, a través de los factores de corrección , $\varnothing_{ij}$, $\varnothing_{oj}$, preserva la propiedad de los rendimientos no constantes a escala. Estos se hallan incorporados a los coeficientes , a_{ij}, b_{oj}, de la tabla de Insumo-Producto; asimismo, se preservan las reglas y procedimientos de los operadores de observación , λ, y semántico, γ, que legalizan el proceso de medición.

2) En relación al teorema estructural se tiene:

- los sistemas no lineal y lineal representan la misma estructura; poseen la raiz común : $A = \lambda I$;
- el sistema no lineal es reducible a la forma lineal;
- La matriz A es regular : ambos sistemas son linealmente independientes, representan una estructura económica lineal.

En sintesis :

. la teoria lineal se constituye en la actualidad con una base axiómática que posibilita un mejor tratamiento de los problemas de linearización de sistemas.

. em los sistemas que hemos analizado, la equivalencia de los respectivos coeficientes permanece, aún bajo el supuesto de rendimientos no constantes a escala; a ello, concurre el proceso de transformación lineal.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. ARROW K.J. and DEBREU G. :" Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy", Econometrica, Vol. 22 (1954) , pp. 265-290.

2. BUCK R.C. : Advanced Calculus, Mac Graw -Hill Book Company, New York, (1965).

3. COURANT R. y ROBBINS H. : ¿ Que es la Matemática ?,Ed.Aguilar S.A., (1964)

4. DEBREU G. : Theory of Value, J.Wiley, New York, (1959).

5. DEBREU G. and HERSTEIN H.A. : " Non Negative Square Matrices", in Readings in Mathematical Economics, by P. Newman,Ed., The J. Hopkins Press, Baltimore,(1968),Vol.I,pp.57-67.

6. GALE D. and NIKAIDO H. : " The Jacobian Matrix and the Global Univalence of Mappings" in Readings in Mathematical Economics, by P. Newman,ed., The J. Hopkins Press, Baltimore (1968), Vol I, pp. 68-80.

7. FRANKLIN J. : Methods of Mathematical Economics, Springer-Verlag, New York, (1980).

8. GANTMACHER F.R. : The Theory of Matrices, Vol II, Chelsea Publishing Co., New York, (1959).

9. GEORGESCU-ROEGEN N. : " Some Properties of a Generalized Leontief Model" in Activity Analysis of Production and Allocation, by T.C. Koopmans, ed., J. Wiley & Sons,Inc. New York, (1951), Chapter X, pp. 165-176.

10. HAWKINS D. :" Some Conditions of Macroeconomic Stability" , Econometrica, Vol 16(oct.1948), pp. 309-322.

11. HAWKINS D. and SIMON H.: " Note: Some Conditions of Macro-economic Stability," Econometrica, Vol. 17(july-oct.1949), pp. 245-248.

12. HICKS J. : "La Teoria Lineal", en Panoramas Contemporaneos de la Teoria Economica, Alianza Ed, Vol III (1970) pp. 122-173.

13. KALDOR N. : " The Irrelevance of Equilibrium Economics", The Economic Journal, Vol. 82(1972) pp. 1237-1255.

14. KALDOR N. : " What is Wrong with Economic Theory",-Quarterly Journal of Economics, vol 89 (1975).

15. KAKUTANI S. : " A Generalization of Brouwer Fixed Point Theorem", in Readings in Mathematical Economics, by P. Newman, ed., The J. Hopkins Press, Baltimore, (1968), Vol. I. pp. 33-35.

16. KELLEY J. L. : General Topoly, Springer-Verlag, New York(1975)

17. KLEIN L.R.: " On the Interpretation of Professor Leontief's System", The Review of Economic Studies, vol XX (1952), pp. 131-136.

18. KLEIN L.R.: An Introduction to Econometrics, Prentice-Hall, Inc, (1962).

19. LANG S. : Introduction to Algebraic Geometry, Interscience Publishers,Inc., New York (1958).

20. LENTIN A. y RIVAUD J.: Algebra Moderna,Ed. Aguilar, (1965)

21. LEONTIEF W.: Studies en the Structure of the American Economy, Oxford University Press, (1953).

22. LEONTIEF W.: Input-Output Economics,Oxford University Press, (1966)

23. MANTEL R.R. : "Equilibrio con Rendimientos Crecientes a Escala" Anales de la Asociación Argentina de Economia Politica, XIV Reunión Anual, Universidad Nacional de Cuyo, vol. I, (1979), pp. 271-281.

24. NERLOVE M.: "Returns to Scale in Electricity Supply" in Readings in Economic Statitistics and Econometrics, by A. Zellner, Little, Brown and Company (1968),pp. 409-439.

25. NIKAIDO H. : "Note on the General Economic Equilibrium for Non Linear Productions Functions, Econométrica, vol. 22, (1954).

26. NIKAIDO H. : Convex Structures and Economic Theory, Academic Press, New York (1968).

27. OLIVERA J.H.G. : Economia Clásica Actual, Ed. Macchi, Bs.As. (1977).

28. OLIVERA J.H.G. : " Economia Structural y Sistemas Lineales", XII Reunión Anual de la Asociación Argentina de Economia Politica, Universidad Nacional de La Pampa(1977),pp.80-89.

29. PIATIER A. CAHUZAC P. y CHAMBADAL L.: Economia y Matematicas I, Ed. Ariel, (1967).

30. ROBINSON J. : "History vs. Equilibrium", Collected Economics Papers, vol.V , Oxford,Basil Blackwell (1979).

31. SAMUELSON P. A.: " Abstract of a Theorem Concerning Sustitutability in Open Leontief Models" in Activity Analysis of Production and Allocation, by T.C. Koopmans,Ed.,J. Wiley & Sons,Inc,New York (1951),chapter VII, pp. 142-146.

32. SAPOSNICK R. and QUIRK J.: Introduction to General Equilibrium Theory and Welfare Economics, MacGraw Hill Company, New York (1968).

33. SRAFFA P. : " The Laws of Returns under Competitive Conditions" in Readings in Price Theory, by G. Stigler and K. Boulding, R. Irwin ,Inc.,(1962), pp. 180-197.

34. VALLEE R. : "Observation et Decision en Théorie des Systémes", economie appliqueé, tome XXVIII,No.4(1975) pp. 723-730.

35. VERDOORN J.P.: "Complementary and Long-Run Projections", Econometrica, vol 24.(1956), pp. 429-450.

36. VON NEUMANN J. : " A Model of General Economic Equilibrium" in Readings in Mathematical Economics, by P. Néwman, vol II, (1968), pp. 221-229.

37. WALD A. : "On some Systems of Equations of Mathematical Economics" Econometrica, vol 19 (1951), pp. 368-403.

38. WALTERS A.A. : " Production and Cost Functions : An Econometric Survey", Econometrica, vol. 31.,No.1-2(january-april 1963) pp. 1-65.

39. YOUNG A. : " Increasing Return and Economic Progress", The Economic Journal, (1928).